Formulasi Inspiratif

Richard Tao Roni Hutagalung

27 Februari 2022

Kata Pengantar

Monograf singkat ini berisi beberapa formulasi / perumusan dalam ilmu matematika dan fisika secara khusus dan mendalam yang menurut hemat penulis dianggap penting serta jarang dan belum pernah dibahas di kebanyakan buku teks kuliah maupun di situs-situs internet / dunia maya. Urutan penyajian masalah dalam monograf ini tidak diurutkan berdasarkan sejarah kronologis yang sebenarnya dari beberapa masalah tersebut, melainkan semata-mata diurutkan dengan datangnya masalah ke dalam pikiran penulis. Pembaca diharapkan kritis dalam membaca, menelaah, meneliti, dan mengoreksi isi monograf ini dari bab ke bab, karena kebanyakan dari beberapa masalah yang disajikan dalam monograf ini bersifat *open-ended* yang harus diteliti lagi secara terus-menerus dan berkesinambungan. Monograf ini merupakan kelanjutan dari kedua monograf saya yang pertama, sehingga saya selaku penulis tidak akan banyak menjelaskan lagi secara detail mengenai sebagian arti teknis dari beberapa istilah matematika dan fisika. Dalam hal ini, pembaca harap memakluminya.

Mengingat penyajian masalah dalam monograf ini tidaklah urut, terutama dalam menjelaskan definisi dan arti istilah-istilah matematika dan fisika, maka para pembaca hendaknya tidak membaca monograf ini urut mulai dari awal hingga akhir, karena sebuah istilah boleh jadi sudah dijelaskan di kedua monograf saya sebelumnya, atau baru akan dijelaskan di bab-bab selanjutnya, atau bahkan sudah sering dijelaskan di buku teks kuliah di luar monograf ini, sehingga untuk dapat memahami monograf ini diperlukan beberapa pra-syarat yang harus dipenuhi. Terus terang, bahwa monograf ini bukanlah sebuah ensiklopedia matematika dan fisika yang mampu menjawab segala rasa ingin tahu pembaca, mengingat yang dipaparkan di sini hanyalah beberapa masalah saja, sehingga monograf ini masih teramat sangat jauh dikatakan lengkap dan jelas. Hal ini semata-mata disebabkan oleh keterbatasan penulis dan keterbatasan izin toleransi waktu penggarapan yang diberikan kepada penulis. Oleh karena itu, masih diperlukan saran dan kritik yang membangun demi kemajuan monograf ini untuk selanjutnya.

Penulis berterima kasih kepada Mbak Caecilia Novi Arumsari yang telah memberikan dukungan penuh seluruh proses pembuatan buku ini dari awal sampai akhir.

UNTUK
CAECILIA NOVI ARUMSARI

Daftar Isi

Bab 1

Kesepakatan Notasi Matematis

1.1 Asumsi Dasar

Untuk membaca monograf ini, para pembaca dianggap sudah menguasai seluruh formalisme matematika, seperti aljabar, geometri, kalkulus, dan sebagainya, sehingga formalisme yang meliputi seluruh definisi dan teorema matematika tidak akan dibahas lagi di dalam monograf ini, kecuali notasi-notasi yang sangat jarang dipakai orang dalam membahas matematika, yang akan dibahas pada beberapa sub-bab selanjutnya. Tetapi ingat, bahwa sebenarnya notasi matematika itu terserah setiap orang. Yang paling penting adalah apa makna yang diwakili dari notasi matematika tersebut.

1.2 Ketergantungan Besaran terhadap Besaran Lain

Nilai besaran-besaran fisika ada yang tetap maupun ada yang berubah-ubah terhadap besaran-besaran fisika yang lain. Meskipun demikian, sebuah besaran fisika boleh dikatakan pasti bergantung pada besaran fisika yang lain, meskipun ketergantungannya tidak harus ketergantungan satu-satu, melainkan bisa juga satu-banyak. Ketergantungan besaran q terhadap besaran t, misalnya, hendak ditulis sebagai $q \mapsto t$ atau bisa juga $t \mapsto q$ atau bisa juga $q = q_t(t)$ atau bisa juga $t = t_q(q)$, sehingga q_t dalam hal ini merupakan pemetaan yang memetakan t ke q, sedangkan t_q dalam hal ini merupakan pemetaan yang memetakan q ke t, di mana q dan t tidak harus tunggal, bahkan boleh tidak terakomodasi. Untuk pemetaan yang memiliki invers, maka $t = q_t^{-1}(q)$ dan $q = t_q^{-1}(t)$, sehingga $q_t^{-1} = t_q$ dan $t_q^{-1} = q_t$. Mengapa terkesan aneh dan berlebihan? Nanti kita juga akan mengetahui betapa pentingnya penulisan notasi semacam ini. Contohnya adalah bahwa $q_t(u)$ belum tentu sama dengan q apabila $u \neq t$. Contohnya lagi adalah bahwa q boleh bergantung pada t maupun u maupun keduanya (t dan u), maka kita boleh menuliskan $q = q_t(t) = q_u(u) = q_{t,u}(t, u)$. Contoh kongkretnya dalam fisika adalah $\gamma := 1/\sqrt{1-(v/c)^2} \mapsto v$ pada persamaan (4.3) di mana $v := |\vec{v}|$, $\vec{v} \mapsto t$, dan $t \mapsto \tau$ maka kita boleh menuliskan $\gamma = \gamma_v(v) = \gamma_{\vec{v}}(\vec{v}) = \gamma_t(t) = \gamma_\tau(\tau)$, sehingga tentu saja pemetaan γ_v, $\gamma_{\vec{v}}$, γ_t, dan γ_τ merupakan empat buah pemetaan yang berbeda satu sama lain. Apabila misalnya x dan y keduanya bergantung pada u dan v, maka kita bisa menuliskan $x \mapsto (u,v)$ dan $y \mapsto (u,v)$ atau dipadukan menjadi $(x,y) \mapsto (u,v)$ atau bisa juga $(x,y) = (x,y)_{u,v}(u,v)$, sehingga u dan v dapat dicari dari persamaan terakhir dengan cara menuliskan $(u,v) = (x,y)_{u,v}^{-1}(x,y)$, lalu $u = ((x,y)_{u,v}^{-1}(x,y))_1$ dan $v = ((x,y)_{u,v}^{-1}(x,y))_2$ untuk pengkodean dengan alasan bahwa u terletak di posisi pertama, sedangkan v terletak di posisi kedua. Secara mudahnya, $u = (u,v,w)_1$, $v = (u,v,w)_2$, dan $w = (u,v,w)_3$. Apabila $z \mapsto (x,y)$, maka tentu saja $y \mapsto (z,x)$ dan juga $x \mapsto (y,z)$. Apabila diketahui $z \mapsto (x,y)$, maka semua besaran selain x, y, dan z itu dianggap konstan terhadap x, y, dan z.

Andaikan diketahui ada pemetaan $f : (x,y) \mapsto z$, maka kita dapat menuliskan $z = f(x,y)$, sehingga persamaan ini dapat dibalik, yaitu misalnya $x = g(y,z)$, di mana $g : (y,z) \mapsto x$ adalah pemetaan yang tentu saja tidak boleh sebarang, melainkan harus bergantung pada f. Kaitan ketergantungannya adalah sebagai berikut. Tentu saja, $(x,y) = f^{-1}(z)$ sehingga $x = (x,y)_1 = (f^{-1}(z))_1 = x_{y,z}(y,z) = ((f^{-1}(z))_1)_{y,z}(y,z)$, sehingga

$$g = ((f^{-1}(z))_1)_{y,z}. \tag{1.1}$$

Soal 1.2.1. Andaikan diketahui $z = f(x,y)$ di mana $f : (x,y) \mapsto z$ adalah sebuah pemetaan, maka buktikanlah bahwa

$$(((((f^{-1}(z))_1)_{y,z})^{-1}(x))_2)_{x,y} = f. \tag{1.2}$$

Jawaban. Karena $z = z_{x,y}(x,y)$, maka

$$\begin{aligned} (((((f^{-1}(z))_1)_{y,z})^{-1}(x))_2)_{x,y} &= (((((x,y)_1)_{y,z})^{-1}(x))_2)_{x,y} \\ &= (((x_{y,z})^{-1}(x))_2)_{x,y} \\ &= (((y,z)_x(x))_2)_{x,y} \\ &= ((y,z)_2)_{x,y} = z_{x,y} = f. \end{aligned} \tag{1.3}$$

∎

Misalkan y, s, dan t adalah peubah-peubah riil sedemikian rupa sehingga $y \mapsto s$ dan $s \mapsto t$, sehingga otomatis $y \mapsto t$. Ada beberapa teorema yang melibatkan turunan mengenai metode ini, yaitu sebagai berikut.

$$\frac{y_t(t+dt)-y}{dt} = \frac{dy}{dt}. \tag{1.4}$$

$$\frac{y_t(t+dt)-y}{ds} = \frac{y_t(t+dt)-y}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{dy}{ds}. \tag{1.5}$$

$$\frac{y_t(t+ds)-y}{dt} = \frac{y_t(t+ds)-y}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dy}{dt}\frac{ds}{dt}. \tag{1.6}$$

$$\frac{y_t(t+ds)-y}{ds} = \frac{dy}{dt}. \tag{1.7}$$

$$\frac{y_t(s+dt)-y}{dt} = \frac{y_t(s+dt)-y_t(s)+y_t(s)-y}{dt} = \left(\frac{dy}{dt}\right)_t(s) + \frac{y_t(s)-y}{dt}. \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}\frac{y_t(s+dt)-y}{ds} &= \frac{y_t(s+dt)-y}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{y_t(s+dt)-y_t(s)+y_t(s)-y}{dt}\frac{dt}{ds} \\ &= \left(\left(\frac{dy}{dt}\right)_t(s) + \frac{y_t(s)-y}{dt}\right)\frac{dt}{ds}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}\frac{y_t(s+ds)-y}{dt} &= \frac{y_t(s+ds)-y}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{y_t(s+ds)-y_t(s)+y_t(s)-y}{ds}\frac{ds}{dt} \\ &= \left(\left(\frac{dy}{dt}\right)_t(s) + \frac{y_t(s)-y}{ds}\right)\frac{ds}{dt}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\frac{y_t(s+ds)-y}{ds} = \frac{y_t(s+ds)-y_t(s)+y_t(s)-y}{ds} = \left(\frac{dy}{dt}\right)_t(s) + \frac{y_t(s)-y}{ds}. \tag{1.11}$$

$$\frac{y_s(t+dt)-y}{dt} = \frac{y_s(t+dt)-y_s(t)+y_s(t)-y}{dt} = \left(\frac{dy}{ds}\right)_s(t) + \frac{y_s(t)-y}{dt}. \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned}\frac{y_s(t+dt)-y}{ds} &= \frac{y_s(t+dt)-y}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{y_s(t+dt)-y_s(t)+y_s(t)-y}{dt}\frac{dt}{ds} \\ &= \left(\left(\frac{dy}{ds}\right)_s(t) + \frac{y_s(t)-y}{dt}\right)\frac{dt}{ds}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned}\frac{y_s(t+ds)-y}{dt} &= \frac{y_s(t+ds)-y}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{y_s(t+ds)-y_s(t)+y_s(t)-y}{ds}\frac{ds}{dt} \\ &= \left(\left(\frac{dy}{ds}\right)_s(t) + \frac{y_s(t)-y}{ds}\right)\frac{ds}{dt}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

$$\frac{y_s(t+ds)-y}{ds} = \frac{y_s(t+ds)-y_s(t)+y_s(t)-y}{ds} = \left(\frac{dy}{ds}\right)_s(t) + \frac{y_s(t)-y}{ds}. \tag{1.15}$$

$$\frac{y_s(s+dt)-y}{dt} = \frac{dy}{ds}. \tag{1.16}$$

$$\frac{y_s(s+dt)-y}{ds} = \frac{y_s(s+dt)-y}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{dy}{ds}\frac{dt}{ds}. \tag{1.17}$$

$$\frac{y_s(s+ds)-y}{dt} = \frac{y_s(s+ds)-y}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dy}{dt}. \tag{1.18}$$

$$\frac{y_s(s+ds)-y}{ds} = \frac{dy}{ds}. \tag{1.19}$$

1.3 Kesepakatan Penjumlahan Einstein

Dalam monograf ini, kesepakatan penjumlahan Einstein hanya akan dipakai untuk suku yang mengandung indeks berulang (dua kali) hanya untuk indeks komponen vektor dan tensor serta indeks unsur matriks. Contohnya pada persamaan (2.34), yaitu

$$I^i{}_j \omega^j \vec{e}_i \equiv \sum_{i,j=1}^{3} I^i{}_j \omega^j \vec{e}_i, \tag{1.20}$$

di mana indeks i dan j bergerak ke seluruh label yang ada, yang dalam hal ini $1, 2, 3$. Begitu juga dengan indeks matriks. Apabila suku yang mengandung indeks berulang tersebut tidak ingin dijumlahkan, maka nanti justru akan diberitahukan, meskipun hal ini jarang terjadi. Dalam monograf ini, bila hal ini terjadi, maka kita akan menuliskan, misalnya $(a_i b_i)_i$, yang artinya suku $a_i b_i$ tidak dijumlahkan. Penulisan semacam ini, sekali lagi, hanya berlaku untuk indeks komponen vektor dan tensor serta indeks unsur matriks.

1.4 Komponen Kovarian dan Komponen Kontravarian Vektor dan Tensor

Pada persamaan (2.34), misalnya, kita melihat ada indeks komponen vektor dan tensor yang di atas dan yang di bawah. Indeks yang di atas itu merupakan indeks komponen kontravarian, sedangkan indeks yang di bawah itu merupakan komponen kovarian. Lain halnya dengan vektor basis kontravarian dan vektor basis kovarian. Vektor basis dengan indeks di bawah, seperti $\vec{e}_i$, justru merupakan vektor basis kontravarian, sedangkan vektor basis dengan indeks di atas, seperti $\vec{e}^i$, justru merupakan vektor basis kovarian, sehingga berlaku kesamaan

$$\vec{A} = A^i \vec{e}_i = A_i \vec{e}^i, \tag{1.21}$$

serta, misalnya,

$$\overleftrightarrow{T} = T^{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = T^i{}_j \vec{e}_i \otimes \vec{e}^j = T_i{}^j \vec{e}^i \otimes \vec{e}_j = T_{ij} \vec{e}^i \otimes \vec{e}^j \tag{1.22}$$

dengan menerapkan kesepakatan penjumlahan Einstein tentunya.

Tensor metriks $\overleftrightarrow{g} := g_{ij} \vec{e}^i \otimes \vec{e}^j = g^{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ memiliki komponen kovarian g_{ij} dan komponen kontravarian g^{ij} yang didefinisikan sebagai

$$g_{ij} := \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \quad \text{dan} \quad g^{ij} := \vec{e}^i \cdot \vec{e}^j, \tag{1.23}$$

sedangkan tentu saja $\vec{e}^i \cdot \vec{e}_j = \delta^i{}_j$.

1.5 Penyingkatan Notasi Turunan

Notasi $\dot{Q}$ berarti $dQ/d\tau$ yaitu bahwa besaran Q diturunkan satu kali terhadap swa-waktu τ. Dalam mekanika relativistik, τ biasanya mewakili besaran swa-waktu, sedangkan t biasanya mewakili besaran waktu sejati. Hubungan antara

t dan τ adalah $dt/d\tau = \gamma$ alias $\dot{t} = \gamma$ di mana γ adalah faktor koreksi relativistik. Dalam mekanika non-relativistik, γ selalu bernilai 1, yang berarti $\dot{t} = 1$, sehingga

$$\dot{Q} = \frac{dQ}{d\tau} = \frac{dQ}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{dQ}{dt}\dot{t} = \frac{dQ}{dt}. \tag{1.24}$$

Persamaan (1.24) hanya berlaku dalam mekanika non-relativistik, tetapi tidak berlaku secara umum dalam mekanika relativistik.

1.6 Notasi Turunan Parsial

Andaikan x, y, z, u, dan v adalah peubah-peubah riil. Notasi seperti $(\partial z/\partial y)_x$ berarti bahwa $z \mapsto (x, y)$ diturunkan terhadap y dengan menganggap x konstan. Andaikan selain itu, $(x, y) \mapsto (u, v)$, maka bolehlah $z = z_{x,y}(x, y_{u,v}(u, v_{x,u}(x, u)))$, sehingga

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_u = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_u \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_u. \tag{1.25}$$

Kita dapat menuliskan $y = y_{u,v}(u, v_{x,u}(x, u))$, sehingga

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_u = \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_u \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_u. \tag{1.26}$$

Dari persamaan (1.26), maka persamaan (1.25) menjadi

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_u = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_u. \tag{1.27}$$

Pada persamaan (1.27), tampak bahwa secara umum,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_u \neq \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y. \tag{1.28}$$

1.7 Domain Integral

Pada persamaan (2.7), misalnya, tampak terdapat domain integral, yaitu $C(d\vec{r}, d\vec{p})$. Ini terkesan aneh dan berlebihan, tetapi sebenarnya tidak demikian. Pada persamaan tersebut, tampak bahwa C adalah domain dari $d\vec{r}$. Tentu saja, domain dari $d\vec{p}$ bukan lagi C, melainkan harus merupakan himpunan yang lain, yang akan kita tulis dan kita sepakati sebagai himpunan $C(d\vec{r}, d\vec{p})$, dengan menganggap bahwa $C(d\vec{r}, d\vec{r})$ akan tereduksi menjadi C, yaitu bahwa

$$C(d\vec{r}, d\vec{r}) \equiv C. \tag{1.29}$$

Lantas, apakah $C(d\vec{p}, d\vec{r})$ sama dengan $C(d\vec{r}, d\vec{p})$? Tentu saja tidak. Karena kita sudah terlanjur menyepakati tata-tulis semacam ini, maka himpunan $C(d\vec{p}, d\vec{r})$ adalah domain bagi $d\vec{r}$ dengan menganggap bahwa C adalah domain bagi $d\vec{p}$. Tentu saja, $C(d\vec{p}, d\vec{p})$ juga akan tereduksi menjadi C saja.

Bab 2

Mekanika Klasik

2.1 Mekanika Sebuah Partikel Klasik

Dalam bab ini, didefinisikan $\dot{Q} := dQ/dt$ untuk sebarang besaran Q.

Sebuah partikel klasik yang menempati posisi $\vec{r}$ pada waktu t akan memiliki kecepatan

$$\vec{v} := \dot{\vec{r}}, \tag{2.1}$$

serta percepatannya adalah

$$\vec{a} := \dot{\vec{v}}. \tag{2.2}$$

Percepatan tangensial partikel tersebut adalah $\vec{a}_{//} := (\vec{a} \cdot \hat{v})\hat{v}$, sedangkan percepatan sentripetal partikel tersebut adalah $\vec{a}_{\perp} := \vec{a} - \vec{a}_{//}$, di mana $\hat{v} := \vec{v}/v$ dan $v := |\vec{v}|$.

Soal 2.1.1. Apabila diketahui $|\vec{v}| = v$, maka carilah $\vec{v} \mapsto v$.

Jawaban. $\vec{v} = v\hat{e}$ di mana $\hat{e}$ adalah sebarang vektor satuan. ■

Apabila massa partikel klasik tersebut adalah m yang secara umum bergantung pada waktu t, maka momentum linier partikel klasik tersebut adalah

$$\vec{p} := m\vec{v}, \tag{2.3}$$

serta gaya yang dialami partikel tersebut adalah

$$\vec{F} := \dot{\vec{p}} = \dot{m}\vec{v} + m\vec{a}. \tag{2.4}$$

Momentum sudut yang dialami oleh partikel tersebut adalah

$$\vec{L} := \vec{r} \times \vec{p}, \tag{2.5}$$

serta torsi (momen gaya) yang dialaminya adalah

$$\vec{\tau} := \dot{\vec{L}} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{2.6}$$

Usaha yang dikerjakan partikel tersebut untuk berpindah melewati lintasan C adalah

$$W_C := \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C(d\vec{r}, d\vec{p})} \vec{v} \cdot d\vec{p}. \tag{2.7}$$

Tenaga kinetik milik partikel tersebut adalah

$$T := \int_{\vec{r}_v(0)}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \tag{2.8}$$

dengan $v := |\vec{v}|$ adalah kelajuan partikel tersebut.

Apabila massa m partikel tersebut konstan, maka

$$T = \int_{\vec{0}}^{\vec{p}} \vec{v} \cdot d\vec{p} = m \int_{\vec{0}}^{\vec{v}} \vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} m \int_0^{v^2} d(v^2) = \frac{1}{2} m v^2. \tag{2.9}$$

Gaya $\vec{F}$ dikatakan konservatif apabila nilai

$$W_C = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{2.10}$$

tidak tergantung pada lintasan C, melainkan hanya tergantung pada nilai $\vec{r}$ di kedua ujung lintasan C yang terbuka. Andaikan $C := \partial A$, di mana $A \subset \mathbb{R}^3$ adalah sebuah permukaan terbuka di ruang $\mathbb{R}^3$, maka tentu saja ∂A adalah lintasan tertutup, sehingga apabila $\vec{F}$ merupakan gaya konservatif, maka berlaku

$$\oint_{\partial A} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0. \tag{2.11}$$

Dari teorema Stokes, persamaan (2.11) menjadi

$$\int_A (\nabla \times \vec{F}) \cdot d^2\vec{r} = 0. \tag{2.12}$$

Karena persamaan (2.12) berlaku untuk sebarang luasan A, maka dari persamaan tersebut, haruslah

$$\nabla \times \vec{F} = \vec{0} \tag{2.13}$$

yang merupakan syarat bahwa $\vec{F}$ konservatif. Penyelesaian persamaan (2.13) antara lain adalah

$$\vec{F} = -\nabla V \tag{2.14}$$

untuk semua skalar V yang dikenal sebagai *tenaga potensial*.

Usaha yang dikerjakan oleh gaya konservatif $\vec{F}$ melewati lintasan C adalah

$$W_C = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_C \nabla V \cdot d\vec{r} = V_i - V_f \tag{2.15}$$

di mana V_i adalah nilai V di titik ujung awal dari C, dan V_f adalah nilai V di titik ujung akhir dari C.

Soal 2.1.2. Apabila diketahui $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ untuk sebarang vektor $\vec{F}$ yang bergantung pada posisi $\vec{r}$, maka buktikanlah (dengan cara menguraikan persamaan vektor tersebut menjadi komponen-komponennya) bahwa semua penyelesaiannya adalah $\vec{F} = -\nabla V$ untuk semua bentuk skalar V yang bergantung pada $\vec{r}$. Samakah hasilnya dengan persamaan (2.14)?

Soal 2.1.3. Sebutkan contoh gaya non-konservatif $\vec{F}$, setelah itu carilah posisi $\vec{r}$ dengan menyelesaikan persamaan (2.4) dengan bantuan persamaan (2.2) dan (2.1). Apa yang dapat disimpulkan mengenai gaya non-konservatif?

Lebih lanjut lagi dari persamaan (2.7) apabila massa m konstan, maka

$$\begin{aligned} W_C &= \int_{C(d\vec{r},d\vec{p})} \vec{v}\cdot d\vec{p} = m\int_{C(d\vec{r},d\vec{v})} \vec{v}\cdot d\vec{v} = \frac{1}{2}m\int_{C(d\vec{r},d(v^2))} d(v^2) \\ &= \frac{1}{2}mv^2|_{\vec{r}\in C} = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) = T_f - T_i \end{aligned} \tag{2.16}$$

di mana v_i (v_f) adalah kelajuan partikel di titik awal (akhir) lintasan C, serta T_i (T_f) adalah tenaga kinetik partikel di titik awal (akhir) lintasan C.

Dengan menyetarakan persamaan (2.15) dan (2.16), diperoleh

$$W_C = V_i - V_f = T_f - T_i \tag{2.17}$$

alias

$$T_f + V_f = T_i + V_i. \tag{2.18}$$

Besaran

$$\mathcal{E}_m := T + V \tag{2.19}$$

ini disebut sebagai energi mekanik partikel, sehingga menurut persamaan (2.18), diperoleh kesimpulan bahwa apabila pada suatu partikel, bekerja gaya konservatif, maka tenaga mekaniknya konstan. Tentu pula bahwa

$$\mathcal{E}_{mf} - \mathcal{E}_{mi} = (T_f + V_f) - (T_i + V_i) = (T_f - T_i) - (V_i - V_f) = W_C - W_C = 0, \tag{2.20}$$

di mana $\mathcal{E}_{mi} := T_i + V_i = \mathcal{E}_m$ dan $\mathcal{E}_{mf} := T_f + V_f = \mathcal{E}_m$.

Apabila W merupakan usaha yang dilakukan partikel tersebut, maka daya partikel tersebut adalah

$$P := \dot{W} = \frac{d}{dt}\int_{\vec{r}_t(t_0)}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt = \vec{F}\cdot\vec{v}. \tag{2.21}$$

2.2 Rotasi Sebuah Partikel Klasik

Sudut rotasi aktif dapat dinyatakan sebagai sebuah vektor, misalnya $\vec{\theta} := \theta\hat{\theta}$, di mana θ merupakan sudut tempuh, dan $\hat{\theta}$ merupakan arah dari $\vec{\theta}$ di ruang $\mathbb{R}^3$. Orientasi putarannya ditentukan oleh $\hat{\theta}$ dengan aturan tangan kanan, yaitu bahwa arah ibu jari yang mengacung menunjukkan arah $\hat{\theta}$, sedangkan keempat jari lainnya yang mengepal menunjukkan arah putarannya. Karena $\hat{\theta}$ semata-mata hanya menunjukkan arah dari $\vec{\theta}$, maka haruslah $|\hat{\theta}| = 1$. Titik pangkal dari vektor $\vec{\theta}$ ini benar-benar menentukan letak dan orientasi arah sumbu putar di ruang $\mathbb{R}^3$.

Apabila sebuah titik yang terletak pada posisi $\vec{r}_0 := r_0\hat{r}_0 \in \mathbb{R}^3$ dirotasikan secara aktif dengan vektor sudut rotasi $\vec{\theta} := \theta\hat{\theta}$ yang titik pangkalnya terletak di posisi $\vec{0}$ sedangkan arah $\hat{\theta}$-nya tetap, maka titik tersebut akan berpindah ke posisi, misalnya $\vec{r}$, sedemikian rupa sehingga

$$\vec{r} = (\hat{\theta}\cdot\vec{r}_0)\hat{\theta} + (\hat{\alpha}\cdot\vec{r}_0\cos\theta - \hat{\beta}\cdot\vec{r}_0\sin\theta)\hat{\alpha} + (\hat{\alpha}\cdot\vec{r}_0\sin\theta + \hat{\beta}\cdot\vec{r}_0\cos\theta)\hat{\beta}, \tag{2.22}$$

di mana

$$\hat{\alpha} := \frac{(\hat{\theta}\times\hat{r}_0)\times\hat{\theta}}{\sqrt{1-(\hat{\theta}\cdot\hat{r}_0)^2}} \quad \text{dan} \quad \hat{\beta} := \frac{\hat{\theta}\times\hat{r}_0}{\sqrt{1-(\hat{\theta}\cdot\hat{r}_0)^2}}. \tag{2.23}$$

Mengingat $\hat{\alpha}\cdot\vec{r}_0 = r_0\sqrt{1-(\hat{\theta}\cdot\hat{r}_0)^2}$ dan $\hat{\beta}\cdot\vec{r}_0 = 0$, maka $(\hat{\alpha}\cdot\vec{r}_0)\hat{\alpha} = (\hat{\theta}\times\vec{r}_0)\times\hat{\theta}$ dan $(\hat{\alpha}\cdot\vec{r}_0)\hat{\beta} = \hat{\theta}\times\vec{r}_0$ sehingga

$$\vec{r} = (\hat{\theta}\cdot\vec{r}_0)\hat{\theta} + (\hat{\theta}\times\vec{r}_0)\times\hat{\theta}\cos\theta + \hat{\theta}\times\vec{r}_0\sin\theta. \tag{2.24}$$

Sekarang, apabila titik $\vec{r}\in\mathbb{R}^3$ dirotasikan secara aktif dan kontinyu oleh vektor sudut rotasi $\vec{\theta} := \theta\hat{\theta}$ yang bertitik pangkal di titik $\vec{0}$, di mana θ dan $\hat{\theta}$ secara umum tidak konstan alias bergantung pada waktu t, maka

$$\begin{aligned}
\vec{r}_t(t+dt) &= (\hat{\theta}\cdot\vec{r})\hat{\theta} + (\hat{\theta}\times\vec{r})\times\hat{\theta}\cos d\theta + \hat{\theta}\times\vec{r}\sin d\theta \\
&= (\hat{\theta}\cdot\vec{r})\hat{\theta} + (\hat{\theta}\times\vec{r})\times\hat{\theta} + \hat{\theta}\times\vec{r}\,d\theta \\
&= (\hat{\theta}\cdot\vec{r})\hat{\theta} + (\vec{r}-(\hat{\theta}\cdot\vec{r})\hat{\theta}) + \hat{\theta}\times\vec{r}\,d\theta \\
&= \vec{r} + \hat{\theta}\times\vec{r}\,d\theta
\end{aligned} \tag{2.25}$$

sehingga

$$\vec{r}_t(t+dt) - \vec{r} \equiv d\vec{r} = \hat{\theta}\times\vec{r}\,d\theta \tag{2.26}$$

alias

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta}\times\vec{r}. \tag{2.27}$$

Untuk mencari $\vec{r}$ yang bergantung pada t secara eksplisit, maka persamaan (2.27) harus diselesaikan untuk $\vec{r}$ yang bergantung pada t.

Soal 2.2.1. Selesaikan persamaan (2.27) untuk $\vec{r}$ yang bergantung t.

Kecepatan sudut $\vec{\omega}$ secara umum didefinisikan sebagai

$$\vec{\omega} := \dot{\vec{\theta}} = \dot{\theta}\hat{\theta} + \theta\dot{\hat{\theta}} \tag{2.28}$$

sehingga apabila $\vec{v} := \dot{\vec{r}}$, serta $\hat{\theta}$ konstan, maka persamaan (2.27) menjadi

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}. \tag{2.29}$$

Selanjutnya, diasumsikan bahwa $\dot{\hat{\theta}} = \vec{0}$.

Percepatan $\vec{a} := \dot{\vec{v}}$ akibat rotasi tersebut tentu saja adalah

$$\vec{a} = \vec{\alpha}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{v} \tag{2.30}$$

di mana $\vec{\alpha} := \dot{\vec{\omega}}$ adalah percepatan sudutnya.

Percepatan tangensial rotasinya adalah

$$\begin{aligned}
\vec{a}_{//} &:= (\vec{a}\cdot\hat{v})\hat{v} = \vec{a}\cdot\vec{v}\vec{v}/v^2 = (\vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v})\cdot\vec{v}\vec{v}/v^2 = (\vec{\alpha}\times\vec{r})\cdot\vec{v}\vec{v}/v^2 \\
&= (\vec{\alpha}\times\vec{r})\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r})\vec{v}/v^2 = \frac{(\vec{\alpha}\cdot\vec{\omega})r^2-(\vec{\alpha}\cdot\vec{r})(\vec{\omega}\cdot\vec{r})}{\omega^2r^2-(\vec{\omega}\cdot\vec{r})^2}\vec{v} \\
&= \frac{\alpha\omega r^2-\alpha r(\hat{\theta}\cdot\hat{r})\omega r(\hat{\theta}\cdot\hat{r})}{\omega^2r^2-\omega^2r^2(\hat{\theta}\cdot\hat{r})^2}\vec{v} = \frac{\alpha\omega r^2}{\omega^2r^2}\vec{v} = \frac{\alpha}{\omega}(\omega\hat{\theta}\times\vec{r}) = \alpha\hat{\theta}\times\vec{r} \\
&= \vec{\alpha}\times\vec{r}. \qquad (2.31)
\end{aligned}$$

Percepatan sentripetalnya adalah

$$\begin{aligned}
\vec{a}_{\perp} &:= \vec{a}-\vec{a}_{//} = (\vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v})-\vec{\alpha}\times\vec{r} \\
&= \vec{\omega}\times\vec{v} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = (\vec{\omega}\cdot\vec{r})\vec{\omega}-\omega^2\vec{r}. \qquad (2.32)
\end{aligned}$$

Apabila $\vec{\omega}$ tegak lurus dengan $\vec{r}$, yaitu bahwa $\vec{\omega}\cdot\vec{r}=0$, maka

$$|\vec{a}_{//}| = |\alpha|r \quad \text{dan} \quad \vec{a}_{\perp} = -\omega^2\vec{r}. \qquad (2.33)$$

Momentum sudut partikel tersebut adalah

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= m\vec{r}\times\vec{v} = m\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = m(r^2\vec{\omega}-(\vec{\omega}\cdot\vec{r})\vec{r}) = m(r^2\omega^i-\omega^j r_j r^i)\vec{e}_i \\
&= m(r^2\delta^i{}_j - r^i r_j)\omega^j\vec{e}_i = I^i{}_j\omega^j\vec{e}_i = L^i\vec{e}_i, \qquad (2.34)
\end{aligned}$$

sehingga

$$L^i = I^i{}_j\omega^j \qquad (2.35)$$

di mana

$$I^i{}_j := m(r^2\delta^i{}_j - r^i r_j) \qquad (2.36)$$

merupakan komponen dari tensor momen inersia $\overleftrightarrow{I} := I^i{}_j\vec{e}_i\otimes\vec{e}^j$.

Tenaga kinetik partikel tersebut adalah

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m|\vec{\omega}\times\vec{r}|^2 = \frac{1}{2}m(\omega^2r^2-(\vec{\omega}\cdot\vec{r})^2) = \frac{1}{2}m(\omega^i\omega_i r^2-\omega_i r^i\omega^j r_j) \\
&= \frac{1}{2}m\omega_i(\delta^i{}_j r^2 - r^i r_j)\omega^j = \frac{1}{2}\omega_i I^i{}_j\omega^j. \qquad (2.37)
\end{aligned}$$

2.3 Mekanika Sistem Partikel Klasik

Andaikan ada sebuah sistem N buah partikel klasik yang masing-masing bermassa $m_1, m_2, m_3, \cdots, m_N$ yang berturut-turut terletak pada posisi $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \cdots, \vec{r}_N$ pada waktu t. Pusat massa sistem partikel tersebut adalah

$$\vec{R} := \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j\vec{r}_j, \qquad (2.38)$$

di mana $M := \sum_{j=1}^{N} m_j$.

Andaikan massa m_j konstan untuk setiap $j \in \{1, 2, 3, \cdots, N\}$, maka kecepatan pusat massa dari sistem partikel tersebut adalah

$$\vec{V} := \dot{\vec{R}} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{v}_j, \tag{2.39}$$

di mana $\vec{v}_j := \dot{\vec{r}}_j$. Tentu saja percepatan pusat massanya adalah

$$\vec{A} := \dot{\vec{V}} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{a}_j, \tag{2.40}$$

di mana $\vec{a}_j := \dot{\vec{v}}_j$

Momentum linier partikel ke-j adalah

$$\vec{p}_j := m_j \vec{v}_j. \tag{2.41}$$

Momentum total dari sistem partikel tersebut adalah

$$\vec{P} := \sum_{j=1}^{N} \vec{p}_j. \tag{2.42}$$

Dari persamaan (2.39), (2.41), dan (2.42), diperoleh

$$\vec{V} = \vec{P}/M \quad \text{alias} \quad \vec{P} = M\vec{V}. \tag{2.43}$$

Momentum sudut partikel ke-j adalah

$$\vec{L}_j := \vec{r}_j \times \vec{p}_j. \tag{2.44}$$

Momentum sudut total dari sistem partikel tersebut adalah

$$\vec{L} := \sum_{j=1}^{N} \vec{L}_j = \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{r}_j \times \vec{v}_j. \tag{2.45}$$

Andaikan posisi partikel ke-j relatif terhadap pusat massa adalah $\vec{r}'_j := \vec{r}_j - \vec{R}$, maka kecepatan partikel tersebut relatif terhadap pusat massa adalah $\vec{v}'_j := \dot{\vec{r}}_j = \vec{v}_j - \vec{V}$, sehingga

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \sum_{j=1}^{N} m_j (\vec{R} + \vec{r}'_j) \times (\vec{V} + \vec{v}'_j) \\
&= \sum_{j=1}^{N} m_j (\vec{R} \times \vec{V} + \vec{R} \times \vec{v}'_j + \vec{r}'_j \times \vec{V} + \vec{r}'_j \times \vec{v}'_j) \\
&= M\vec{R} \times \vec{V} + \vec{R} \times \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{v}'_j + \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{r}'_j \times \vec{V} + \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{r}'_j \times \vec{v}'_j.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Karena $\sum_{j=1}^{N} m_j\vec{v}'_j = \sum_{j=1}^{N} m_j(\vec{v}_j - \vec{V}) = \vec{0}$ dan $\sum_{j=1}^{N} m_j\vec{r}'_j = \sum_{j=1}^{N} m_j(\vec{r}_j - \vec{R}) = \vec{0}$, maka persamaan (2.46) menjadi

$$\vec{L} = M\vec{R}\times\vec{V} + \sum_{j=1}^{N} m_j\vec{r}'_j \times \vec{v}'_j, \tag{2.47}$$

yang berarti bahwa momentum sudut total adalah jumlahan dari momentum sudut pusat massa dengan jumlah momentum sudut relatif terhadap pusat massa.

Tenaga kinetik partikel ke-j adalah

$$T_j := \frac{1}{2}m_j v_j^2. \tag{2.48}$$

Tenaga kinetik total dari sistem partikel tersebut adalah

$$\begin{aligned} T &:= \sum_{j=1}^{N} T_j = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j v_j^2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j|\vec{V}+\vec{v}'_j|^2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j(V^2 + v_j'^2 + 2\vec{V}\cdot\vec{v}'_j) \\ &= \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j v_j'^2 + \vec{V}\cdot\sum_{j=1}^{N} m_j\vec{v}'_j = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j v_j'^2, \end{aligned} \tag{2.49}$$

yang berarti bahwa tenaga kinetik total adalah jumlahan dari tenaga kinetik pusat massa dengan jumlah tenaga kinetik relatif terhadap pusat massa.

Gaya yang dialami oleh partikel ke-i adalah

$$\vec{F}_i = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i^e \tag{2.50}$$

di mana $\vec{F}_{ij}$ adalah gaya interaksi yang dialami oleh partikel ke-i akibat partikel ke-j, serta $\vec{F}_i^e$ adalah gaya luar yang dialami oleh partikel ke-i. Gaya interaksi ini memiliki sifat $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ sehingga $\vec{F}_{ii} = \vec{0}$.

Gaya total yang bekerja pada sistem N partikel tersebut adalah

$$\vec{F} := \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i = \sum_{i,j=1}^{N}\vec{F}_{ij} + \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^e. \tag{2.51}$$

Karena $\sum_{i,j=1}^{N}\vec{F}_{ij} = \frac{1}{2}(\sum_{i,j=1}^{N}\vec{F}_{ij} + \sum_{j,i=1}^{N}\vec{F}_{ji}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}(\vec{F}_{ij}+\vec{F}_{ji}) = \vec{0}$, maka persamaan (2.51) menjadi

$$\vec{F} = \vec{F}^e \tag{2.52}$$

di mana $\vec{F}^e := \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^e$ adalah total gaya luar yang bekerja pada sistem partikel.

Dari persamaan (2.52), tampak jelas bahwa gaya total yang dialami oleh sistem partikel adalah hanya gaya luar yang bekerja pada sistem partikel tersebut, sedangkan gaya interaksi antar-partikel sama sekali tidak mempengaruhi gaya totalnya.

Tentu saja, gaya yang dialami oleh partikel ke-i adalah $\vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_i$, sehingga gaya total yang bekerja pada sistem partikel tersebut adalah

$$\vec{F} := \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N}\dot{\vec{p}}_i = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i = \dot{\vec{P}} = \vec{F}^e, \tag{2.53}$$

sehingga apabila total gaya luar tidak ada, maka momentum linier total kekal.

Torsi total yang dialami oleh sistem partikel tersebut adalah

$$\vec{\tau} := \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \left(\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i^e \right) = \sum_{i,j=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^e. \tag{2.54}$$

Tentu saja, pada persamaan (2.54),

$$\sum_{i,j=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \sum_{j,i=1}^{N} \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}. \tag{2.55}$$

Apabila $\vec{F}_{ij}$ memenuhi *hukum kuat interaksi*, maka $(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = \vec{0}$, sedangkan apabila $\vec{F}_{ij}$ *hukum lemah interaksi*, maka $(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} \neq \vec{0}$. Apabila $\vec{F}_{ij}$ pada persamaan (2.55) memenuhi hukum kuat interaksi, maka $(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = \vec{0}$, yang menyebabkan persamaan (2.55) menjadi $\sum_{i,j=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \vec{0}$, sehingga persamaan (2.54) menjadi

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}^e \tag{2.56}$$

di mana $\vec{\tau}^e := \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^e$ adalah total torsi luar yang dialami oleh sistem partikel tersebut.

Tentu saja torsi yang dialami oleh partikel ke-i adalah $\vec{\tau}_i = \dot{\vec{L}}_i$, sehingga torsi total yang dialami oleh sistem partikel tersebut adalah

$$\vec{\tau} := \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_i = \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{L}}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \dot{\vec{L}} = \vec{\tau}^e, \tag{2.57}$$

sehingga apabila total torsi luar tidak ada, maka momentum sudut total kekal.

Bab 3

Mekanika Lagrange

3.1 Persamaan Lagrange Mekanika Klasik Non-Relativistik

Dalam bab ini, didefinisikan $\dot{Q} := dQ/dt$ untuk sebarang besaran Q.

Andaikan ada N buah partikel yang masing-masing bermassa $m_1, \cdots, m_N$ yang berturut-turut terletak di posisi $\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_N$ yang masing-masing bergantung secara eksplisit pada $n \leq 3N$ buah koordinat umum, yaitu $q^1, \cdots, q^n$ dan waktu t, di mana q^i bergantung pada t untuk semua $i \in \{1, \cdots, n\}$, maka total usaha maya yang dikerjakan oleh sistem partikel tersebut adalah

$$\delta W := \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i, \tag{3.1}$$

di mana secara khusus $\vec{F}_i := m_i\ddot{\vec{r}}_i$ merupakan gaya yang bekerja pada partikel ke-i. Karena selalu $\delta t = 0$

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q^j}\delta q^j, \tag{3.2}$$

maka

$$\delta W = \sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q^j \tag{3.3}$$

di mana

$$Q_j := \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q^j} \tag{3.4}$$

merupakan komponen gaya umum pada koordinat q^j.

Tentu saja,

$$\vec{v}_i := \dot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t} \tag{3.5}$$

sehingga

$$\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}^j} = \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q^j}. \tag{3.6}$$

Selain itu,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^j} = \sum_{k=1}^{n}\left(\dot{q}^k\frac{\partial}{\partial q^k} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^j} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q^j}. \tag{3.7}$$

Dari persamaan (3.4), diperoleh

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^j} = \sum_{i=1}^{N} m_i\left(\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^j}\right) - \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^j}\right). \tag{3.8}$$

Substitusi (3.6) dan (3.7) ke persamaan (3.8) menghasilkan

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} m_i\left(\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}^j}\right) - \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q^j}\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial T_i}{\partial q^j}\right), \tag{3.9}$$

di mana $T_i := \frac{1}{2}m_i v_i^2$ adalah tenaga kinetik milik partikel ke-i, dengan $v_i := |\vec{v}_i|$ adalah kelajuan milik partikel ke-i.

Karena $T := \sum_{i=1}^{N} T_i$ adalah tenaga kinetik total milik N buah partikel tersebut, maka persamaan (3.9) menjadi

$$Q_j = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial T}{\partial q^j}. \tag{3.10}$$

Apabila $\vec{F}_i$ merupakan gaya konservatif, maka tentu saja $\vec{F}_i = -\nabla_i V$ untuk semua tenaga potensial V, di mana $\nabla_i := \sum_{j=1}^{3} \vec{e}^j \partial/\partial {q^j}_i$, sehingga persamaan (3.4) menjadi

$$Q_j := -\sum_{i=1}^{N} \nabla_i V \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q^j} = -\frac{\partial V}{\partial q^j}. \tag{3.11}$$

Apabila V hanya bergantung pada koordinat umum $q^1, \cdots, q^n$ dan waktu t saja, maka persamaan (3.10) menjadi

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0 \tag{3.12}$$

di mana $L := T - V$ adalah *Lagrangian* sistem, yang tentu saja bergantung pada $q^1, \cdots, q^n, \dot{q}^1, \cdots, \dot{q}^n, t$.

Momentum umum alias *momentum konjugat* didefinisikan sebagai

$$p_j := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}, \tag{3.13}$$

sehingga substitusi persamaan (3.13) ke persamaan (3.12) menghasilkan

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q^j}. \tag{3.14}$$

Selanjutnya,

$$\dot{L} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\ddot{q}^j\right) + \frac{\partial L}{\partial t}. \tag{3.15}$$

Substitusi persamaan (3.14) dan (3.13) ke persamaan (3.15), menghasilkan

$$\dot{L} = \sum_{j=1}^{n} \left(\dot{p}_j \dot{q}^j + p_j \ddot{q}^j \right) + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt} \left(p_j \dot{q}^j \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \tag{3.16}$$

alias

$$\dot{H} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{3.17}$$

di mana $H := \sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}^j - L$ adalah *Hamiltonian* sistem yang secara umum bergantung pada $q^1, \cdots, q^n$, $p_1, \cdots, p_n, t$. Tentu saja, dari persamaan (3.14), diperoleh

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}^j, \qquad \frac{\partial H}{\partial q^j} = -\dot{p}_j, \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{3.18}$$

Selanjutnya, apabila ada besaran fisis A yang secara eksplisit bergantung pada $q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n, t$, maka

$$\dot{A} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial A}{\partial q^j} \dot{q}^j + \frac{\partial A}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial A}{\partial t}. \tag{3.19}$$

Substitusi persamaan (3.18) ke persamaan (3.19) menghasilkan

$$\dot{A} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial A}{\partial q^j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q^j} \right) + \frac{\partial A}{\partial t}. \tag{3.20}$$

Apabila didefinisikan kurung Poisson antara besaran fisis A dan B sebagai

$$[A, B] := \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial A}{\partial q^j} \frac{\partial B}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_j} \frac{\partial B}{\partial q^j} \right), \tag{3.21}$$

maka persamaan (3.20) menjadi

$$\dot{A} = [A, H] + \frac{\partial A}{\partial t}. \tag{3.22}$$

3.2 Kalkulus Variasi

Andaikan ada besaran $\mathcal{L}$ yang bergantung pada $q^1, \cdots, q^n$, $\partial_1 q^1, \cdots, \partial_1 q^n, \cdots, \cdots, \cdots$, $\partial_m q^1, \cdots, \partial_m q^n$, $t^1, \cdots, t^m$, di mana $\partial_j q^i := \partial q^i / \partial t^j$. Kita akan membuat nilai

$$I := \int_{t_-^m}^{t_+^m} \cdots \int_{t_-^1}^{t_+^1} \mathcal{L} \, dt^1 \cdots dt^m \tag{3.23}$$

menjadi stasioner, yaitu bahwa $\delta I = 0$, dengan menganggap $\delta t^j = 0$, serta

$$(\delta q^i)_{t^1, \dots, t^m}(t^1, \cdots, t^{j-1}, t_-^j, t^{j+1}, \cdots, t^m) = (\delta q^i)_{t^1, \dots, t^m}(t^1, \cdots, t^{j-1}, t_+^j, t^{j+1}, \cdots, t^m) = 0 \tag{3.24}$$

untuk setiap $j \in \{1, \cdots, m\}$, sehingga

$$\int_{t_-^m}^{t_+^m} \cdots \int_{t_-^1}^{t_+^1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \delta q^i + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial q^i/\partial t^j)} \delta \frac{\partial q^i}{\partial t^j} \right) dt^1 \cdots dt^m = 0. \tag{3.25}$$

Karena $\delta(\partial q^i/\partial t^j) = \partial(\delta q^i)/\partial t^j$, maka persamaan (3.25) menjadi

$$\int_{t_-^m}^{t_+^m} \cdots \int_{t_-^1}^{t_+^1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial t^j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial q^i/\partial t^j)} \right) \delta q^i \, dt^1 \cdots dt^m = 0. \tag{3.26}$$

Karena persamaan (3.26) berlaku untuk sebarang variasi dan batas-batas integrasi, maka persamaan (3.26) menjadi

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial t^j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial q^i/\partial t^j)} = 0. \tag{3.27}$$

Apabila $m = 1$, $t^1 = t$, dan $\mathcal{L} = L$, maka persamaan (3.27) menjadi

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} = 0 \tag{3.28}$$

yang ternyata serupa dengan persamaan (3.12).

Andaikan ada p buah kendala, yaitu $\varphi_k = 0$, dengan $\varphi_k \mapsto (q^1, \cdots, q^n, t^1, \cdots, t^m)$, untuk semua $k \in \{1, \cdots, p\}$, maka Lagrangian $\mathcal{L}$ pada persamaan (3.27) dapat diganti dengan $\mathcal{L} + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \varphi_k$, dengan λ_k adalah *pengali Lagrange*, sehingga persamaan (3.27) menjadi

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial t^j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial q^i/\partial t^j)} + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial q^i} = 0. \tag{3.29}$$

Diferensial dari persamaan $\varphi_k = 0$ adalah

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial t^j} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial t^j} = 0, \tag{3.30}$$

sehingga persamaan (3.30) dapat diringkas bentuknya menjadi

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki} \frac{\partial q^i}{\partial t^j} + b_{kj} = 0, \tag{3.31}$$

di mana $a_{ki} := \partial \varphi_k/\partial q^i$ dan $b_{kj} := \partial \varphi_k/\partial t^j$, sehingga persamaan (3.29) menjadi

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial t^j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial q^i/\partial t^j)} + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k a_{ki} = 0. \tag{3.32}$$

Apabila pada persamaan (3.31) tidak diketemukan φ_k yang memenuhi persamaan $\partial \varphi_k/\partial q^i = a_{ki}$ dan $\partial \varphi_k/\partial t^j = b_{kj}$, maka bentuk diferensial pada persamaan (3.31) disebut *diferensial tak eksak*. Oleh karena itu, untuk mencari $q^1, \cdots, q^n \mapsto (t^1, \cdots, t^m)$ dan $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$, diperlukan n buah persamaan (3.32) dan mp buah persamaan (3.31).

Bab 4

Mekanika Klasik Relativistik

4.1 Kinematika dan Dinamika Relativistik Klasik

Dalam bab ini, didefinisikan $\dot{Q} := dQ/d\tau$ untuk sebarang besaran Q.

Andaikan ada sebuah kereta yang melaju dengan kelajuan v selama selang waktu dt (menurut pengamat di stasiun) pada sebuah rel yang lurus, sementara pada kereta tersebut dipasang sepasang cermin yang saling berhadapan dengan arah hadap yang tegak lurus dengan rel tadi. Dari cermin pertama memancar sinar dengan kelajuan $c := 299792458\,\mathrm{m/s}$ menuju ke cermin kedua selama selang waktu $d\tau$ menurut kereta yang melaju tadi, maka menurut pengamat di stasiun, sinar tadi pasti bergerak dengan kelajuan c selama selang waktu dt, sedemikian rupa sehingga (dari teorema Pythagoras)

$$(c\,dt)^2 = (v\,dt)^2 + (c\,d\tau)^2 \tag{4.1}$$

alias

$$dt = \gamma\,d\tau \tag{4.2}$$

di mana

$$\gamma := 1/\sqrt{1-(v/c)^2} \tag{4.3}$$

serta τ merupakan swa-waktu milik kereta tadi, sedangkan t merupakan waktu sejati yang diamati oleh pengamat yang melihat kereta yang bergerak dengan kelajuan v. Persamaan (4.2) dapat ditulis sebagai

$$\dot{t} = \gamma, \tag{4.4}$$

dengan menganggap bahwa t bergantung pada τ.

Soal 4.1.1. Andaikan diketahui sebuah partikel klasik berkecepatan $\vec{v} \mapsto t$ pada waktu t, maka carilah kaitan antara waktu t dengan swa-waktu-nya τ dengan cara menyelesaikan persamaan (4.4), yaitu mencari $t \mapsto \tau$.

Andaikan ada partikel klasik terletak pada posisi $\vec{r}$ pada waktu t dan pada swa-waktu τ, maka kecepatan partikel tersebut adalah

$$\vec{v} := \frac{d\vec{r}}{dt}, \tag{4.5}$$

sedangkan swa-kecepatan-nya adalah

$$\vec{u} := \dot{\vec{r}} \equiv \frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \vec{v}\dot{t} = \vec{v}\gamma. \tag{4.6}$$

Andaikan partikel tersebut bermassa rehat m_0, maka momentum linier partikel tersebut didefinisikan sebagai

$$\vec{p} := m_0\vec{u} = m_0\vec{v}\gamma = m\vec{v} \tag{4.7}$$

di mana $m := m_0\gamma$ merupakan massa bergerak partikel tersebut, yaitu massa yang diamati oleh pengamat yang melihat partikel tersebut bergerak dengan kelajuan v. Sedangkan gaya yang dikerjakan partikel tersebut tentu saja adalah

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m_0\left(\vec{a}\gamma + \vec{v}\frac{d\gamma}{dt}\right) \tag{4.8}$$

di mana $\vec{a} := d\vec{v}/dt$ adalah percepatan partikel tersebut. Tentu saja,

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}, \tag{4.9}$$

sehingga persamaan (4.8) menjadi

$$\vec{F} = m_0\left(\vec{a}\gamma + \vec{v}\gamma^3\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\right). \tag{4.10}$$

Andaikan $\vec{a}_{//} := (\vec{a}\cdot\hat{v})\hat{v}$ merupakan percepatan tangensial (longitudinal), serta $\vec{a}_{\perp} := \vec{a} - \vec{a}_{//}$ merupakan percepatan sentripetal (transversal), maka tentu saja $\vec{a} = \vec{a}_{//} + \vec{a}_{\perp}$, sehingga

$$\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{a}) = \vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{a}_{//}) = v\hat{v}(\vec{v}\cdot\hat{v})(\vec{a}\cdot\hat{v}) = v^2\vec{a}_{//}. \tag{4.11}$$

Persamaan (4.10) menjadi

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m_0\left((\vec{a}_{//} + \vec{a}_{\perp})\gamma + \gamma^3 v^2\vec{a}_{//}/c^2\right)\\ &= m_{//}\vec{a}_{//} + m_{\perp}\vec{a}_{\perp}\end{aligned} \tag{4.12}$$

di mana $m_{//} := m_0\gamma^3$ merupakan *massa longitudinal*, sedangkan $m_{\perp} := m_0\gamma$ merupakan *massa transversal*, karena $1 + \gamma^2 v^2/c^2 = \gamma^2$.

Tenaga kinetik partikel tersebut adalah

$$\begin{aligned}T &= \int_{\vec{0}}^{\vec{p}} \vec{v}\cdot d\vec{p} = \vec{v}\cdot\vec{p}|_{\vec{0}}^{\vec{v}} - \int_{\vec{0}}^{\vec{v}} \vec{p}\cdot d\vec{v} = \gamma m_0 v^2 - m_0\int_0^v \gamma v\, dv\\ &= \gamma m_0 c^2(1-\gamma^{-2}) - m_0 c^2\int_1^{\gamma}\gamma^{-2}d\gamma\\ &= \gamma m_0 c^2(1-\gamma^{-2}) + m_0 c^2(\gamma^{-1} - 1)\\ &= (\gamma - 1)m_0 c^2 = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0,\end{aligned} \tag{4.13}$$

di mana $\mathcal{E} := \gamma m_0 c^2 = mc^2$ merupakan tenaga relativistik partikel tersebut, sedangkan $\mathcal{E}_0 := m_0 c^2$ merupakan tenaga rehat partikel tersebut.

Kaitan antara tenaga relativistik $\mathcal{E}$ dan momentum $\vec{p}$ adalah sebagai berikut. Dari kaitan $\mathcal{E} = \gamma m_0 c^2$ dan $\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v}$, kita akan mengeliminasi γ (otomatis $\vec{v}$ juga). Mula-mula, kita peroleh $p^2 = \gamma^2 m_0^2 v^2 = m_0^2 c^2(\gamma^2 - 1)$. Lantas, $\gamma^2 = \mathcal{E}^2/(m_0c^2)^2 = p^2/(m_0^2c^2) + 1$ alias

$$\mathcal{E}^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2 \quad \text{alias} \quad \mathcal{E}^2 = (pc)^2 + \mathcal{E}_0^2. \tag{4.14}$$

Dari persamaan (2.21) dan (4.12), diperoleh bahwa daya yang dimiliki partikel tersebut adalah

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = m_{//} a_{//} v, \tag{4.15}$$

di mana $a_{//} := \vec{a} \cdot \hat{v}$ adalah perlajuan milik partikel tersebut, sebab $\vec{a}_\perp \cdot \vec{v} = 0$.

4.2 Gerak Relatif

Andaikan pada swa-waktu τ diketahui sebuah partikel klasik terletak pada posisi $\vec{r}$ menurut titik acuan O, serta posisi $\vec{r}'$ menurut titik acuan O', sedangkan posisi O' menurut O adalah $\vec{R}$. Tentu saja, kecepatan O' menurut O adalah $\vec{V} := d\vec{R}/dt$. Waktu sejati menurut O adalah t, dan menurut O' adalah t', sedemikian rupa sehingga $\dot{t} = \gamma$ dan $\dot{t}' = \gamma'$, di mana $\gamma := 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$ dan $\gamma' := 1/\sqrt{1-(v'/c)^2}$, dengan $v := |\vec{v}|$ adalah kelajuan partikel tersebut menurut O, $v' := |\vec{v}'|$ adalah kelajuan partikel tersebut menurut O', $\vec{v} := d\vec{r}/dt$ adalah kecepatan partikel tersebut menurut O, dan $\vec{v}' := d\vec{r}'/dt'$ adalah kecepatan partikel tersebut menurut O'.

Andaikan $v = c$, maka tentu saja $v' = c$ juga, sehingga

$$v'^2 - c^2 = -c^2/\gamma'^2 = -c^2(d\tau/dt')^2 \quad \text{dan} \quad v^2 - c^2 = -c^2/\gamma^2 = -c^2(d\tau/dt)^2 \tag{4.16}$$

alias

$$|d\vec{r}'|^2 - c^2dt'^2 = |d\vec{r}|^2 - c^2dt^2 = -c^2d\tau^2 = |d\overrightarrow{s}|^2, \tag{4.17}$$

di mana $\overrightarrow{s} := \vec{r} + ict\hat{x}_0 \equiv \vec{r}' + ict'\hat{x}_0$ adalah vektor-4 posisi di ruang-waktu, yang tidak tergantung pengamat, sedemikian rupa sehingga[1]

$$|\hat{x}_0| = 1 \quad \text{dan} \quad \hat{x}_0 \cdot d\vec{r} = \hat{x}_0 \cdot d\vec{r}' = 0, \tag{4.18}$$

di mana $\hat{x}_0$ adalah vektor konstan.

Pergeseran $d\vec{r}$ dan $d\vec{r}'$ dapat dipisahkan menjadi komponen sejajar dan tegak lurusnya dengan $\vec{V}$, yaitu $d\vec{r} = d\vec{r}_{//} + d\vec{r}_\perp$ dan $d\vec{r}' = d\vec{r}'_{//} + d\vec{r}'_\perp$, di mana $d\vec{r}_{//} := d\vec{r} \cdot \hat{V}\hat{V}$, $d\vec{r}_\perp := d\vec{r} - d\vec{r}_{//}$, $d\vec{r}'_{//} := d\vec{r}' \cdot \hat{V}\hat{V}$, dan $d\vec{r}'_\perp := d\vec{r}' - d\vec{r}'_{//}$. Karena

$$d\vec{r}'_\perp = d\vec{r}_\perp, \tag{4.19}$$

maka persamaan (4.17) menjadi

$$|d\vec{r}'_{//}|^2 - c^2dt'^2 = |d\vec{r}_{//}|^2 - c^2dt^2, \tag{4.20}$$

[1]Notasi $\overrightarrow{s}$ adalah vektor-4 yang membedakan dengan vektor-3 $\vec{s}$. Vektor-4 $\overrightarrow{A}$ akan dibedakan dengan vektor-3 $\vec{A}$.

alias

$$(d\vec{r}'_{//}\cdot\hat{V})^2 - c^2dt'^2 = (d\vec{r}_{//}\hat{V})^2 - c^2dt^2, \tag{4.21}$$

Apabila $d\vec{r}' = \vec{0}$, maka haruslah $d\vec{r} = \vec{V}dt$ sehingga $d\vec{r}'_{//} = \vec{0}$ dan $d\vec{r}_{//} = \vec{V}dt$. Apabila $d\vec{r} = \vec{0}$, maka haruslah $d\vec{r}' = -\vec{V}dt'$ sehingga $d\vec{r}_{//} = \vec{0}$ dan $d\vec{r}'_{//} = -\vec{V}dt'$. Oleh karena itu, haruslah

$$d\vec{r}'_{//} = \Gamma(d\vec{r}_{//} - \vec{V}dt) \quad \text{dan} \quad d\vec{r}_{//} = \Gamma'(d\vec{r}'_{//} + \vec{V}dt'), \tag{4.22}$$

di mana Γ dan Γ' adalah *faktor Lorentz* yang harus bernilai positif.

Pengalikan titik dengan $\hat{V}$ pada persamaan (4.22) menghasilkan

$$d\vec{r}'_{//}\cdot\hat{V} = \Gamma(d\vec{r}_{//}\cdot\hat{V} - V\,dt) \quad \text{dan} \quad d\vec{r}_{//}\cdot\hat{V} = \Gamma'(d\vec{r}'_{//}\cdot\hat{V} + V\,dt'), \tag{4.23}$$

sehingga

$$d\vec{r}_{//}\cdot\hat{V} = \Gamma'(\Gamma(d\vec{r}_{//}\cdot\hat{V} - V\,dt) + V\,dt') \tag{4.24}$$

lalu

$$dt' = \frac{1}{V}\left(\left(\frac{1}{\Gamma'} - \Gamma\right)d\vec{r}_{//}\cdot\hat{V} + \Gamma V\,dt\right). \tag{4.25}$$

Dengan memasukkan nilai dt' dari persamaan (4.25) dan $d\vec{r}'\cdot\hat{V}$ dari persamaan (4.23) ke persamaan (4.21), serta dengan mengidentikkan koefisien dari $(d\vec{r}\cdot\hat{V})^2$, $(d\vec{r}\cdot\hat{V})dt$ dan dt^2, maka diperoleh

$$\Gamma = \Gamma' = 1/\sqrt{1-(V/c)^2}. \tag{4.26}$$

Dari persamaan (4.22) dan (4.19), serta persamaan (4.25) dan (4.26), diperoleh

$$d\vec{r}' = d\vec{r} + (\Gamma - 1)d\vec{r}_{//} - \Gamma\vec{V}\,dt \tag{4.27}$$

dan

$$dt' = \Gamma(dt - d\vec{r}\cdot\vec{V}/c^2), \tag{4.28}$$

sehingga

$$\vec{v}' = \frac{\vec{v} + (\Gamma-1)\vec{v}_{//} - \Gamma\vec{V}}{\Gamma(1 - \vec{v}\cdot\vec{V}/c^2)}. \tag{4.29}$$

Karena $\dot{t} = \gamma$ dan $\dot{t}' = \gamma'$, maka persamaan (4.28) menjadi

$$\gamma' = \Gamma\gamma(1 - \vec{v}\cdot\vec{V}/c^2). \tag{4.30}$$

Apabila massa rehat partikel tadi adalah m_0, serta momentum linier partikel tersebut teramati $\vec{p} = m_0\vec{v}\gamma$ di O, dan teramati $\vec{p}' = m_0\vec{v}'\gamma'$ di O', dengan mengalikan kedua ruas persamaan (4.29) dengan $m_0\gamma'$, maka diperoleh

$$\vec{p}' = \vec{p} + (\Gamma-1)\vec{p}_{//} - \Gamma\vec{V}\mathcal{E}/c^2 \tag{4.31}$$

di mana $\vec{p}_{//} := \vec{p}\cdot\hat{V}\hat{V}$ dan $\mathcal{E} = m_0c^2\gamma$.

Dengan memanfaatkan persamaan (4.30), maka persamaan $\mathcal{E}' = m_0c^2\gamma'$ menjadi

$$\mathcal{E}' = \Gamma(\mathcal{E} - \vec{p}\cdot\vec{V}), \tag{4.32}$$

di mana $\mathcal{E} = m_0 c^2 \gamma$.

Dengan membagi kedua ruas persamaan (4.31) dengan m_0, serta mengingat $\vec{p}' = m_0 \vec{u}'$ dan $\vec{p} = m_0 \vec{u}$, di mana $\vec{u}' := \dot{\vec{r}}'$ dan $\vec{u} := \dot{\vec{r}}$, maka diperoleh

$$\vec{u}' = \vec{u} + (\Gamma - 1)\vec{u}_{//} - \Gamma \vec{V} \gamma, \tag{4.33}$$

dan persamaan (4.30) menjadi

$$\gamma' = \Gamma(\gamma - \vec{u} \cdot \vec{V}/c^2), \tag{4.34}$$

di mana $\vec{u}_{//} := \vec{u} \cdot \hat{V} \hat{V}$.

Karena $\mathcal{E} = mc^2$ dan $\mathcal{E}' = m'c^2$, di mana $m = m_0 \gamma$ dan $m' = m_0 \gamma'$, maka persamaan (4.31) menjadi

$$\vec{p}' = \vec{p} + (\Gamma - 1)\vec{p}_{//} - \Gamma m \vec{V}, \tag{4.35}$$

dan persamaan (4.32) menjadi

$$m' = \Gamma(m - \vec{p} \cdot \vec{V}/c^2). \tag{4.36}$$

Pemetaan-pemetaan seperti $(d\vec{r}, dt) \mapsto (d\vec{r}', dt')$ yaitu persamaan (4.27) dan (4.28), lalu $(\vec{p}, \mathcal{E}) \mapsto (\vec{p}', \mathcal{E}')$ yaitu persamaan (4.31) dan (4.32), lalu $(\vec{u}, \gamma) \mapsto (\vec{u}', \gamma')$ yaitu persamaan (4.33) dan (4.34), lalu $(\vec{p}, m) \mapsto (\vec{p}', m')$ yaitu persamaan (4.35) dan (4.36), semuanya adalah contoh-contoh dari *transformasi Lorentz* dengan parameter $\vec{V}$, sedangkan pemetaan $\vec{v} \mapsto \vec{v}'$ yaitu persamaan (4.29) merupakan *kaedah penjumlahan Einstein* untuk kecepatan dengan parameter $\vec{V}$.

Persamaan (4.33) dapat ditulis kembali menjadi

$$u'^i \vec{e}_i = u^i \vec{e}_i + (\Gamma - 1) u^j V_j V^i \vec{e}_i / V^2 - \Gamma \gamma V^i \vec{e}_i, \tag{4.37}$$

dan persamaan (4.34) dapat ditulis kembali menjadi

$$\gamma' \vec{e}_0 = \Gamma(\gamma - u^j V_j / c^2) \vec{e}_0. \tag{4.38}$$

Persamaan (4.37) dapat ditulis per-komponen-nya menjadi

$$u'^i = u^i + (\Gamma - 1) u^j V_j V^i / V^2 - \Gamma \gamma V^i \tag{4.39}$$

alias (dengan menganggap $c\gamma =: u^0$ dan $c\gamma' =: u'^0$)

$$u'^i = (\delta^i{}_j + (\Gamma - 1) V^i V_j / V^2) u^j - (\Gamma V^i / c) u^0 \tag{4.40}$$

serta persamaan (4.38) menjadi

$$u'^0 = (-\Gamma V_j / c) u^j + \Gamma u^0. \tag{4.41}$$

Persamaan (4.40) dapat diringkas penulisannya menjadi

$$u'^i = \Lambda^i{}_j u^j + \Lambda^i{}_0 u^0, \tag{4.42}$$

dan persamaan (4.41) dapat diringkas penulisannya menjadi

$$u'^0 = \Lambda^0{}_j u^j + \Lambda^0{}_0 u^0, \tag{4.43}$$

di mana

$$\Lambda^i{}_j := \delta^i{}_j + (\Gamma-1)V^iV_j/V^2, \qquad \Lambda^i{}_0 := -\Gamma V^i/c, \tag{4.44}$$

$$\Lambda^0{}_j := -\Gamma V_j/c, \qquad \text{dan} \qquad \Lambda^0{}_0 := \Gamma, \tag{4.45}$$

sehingga persamaan (4.42) dan (4.43) dapat dipadukan menjadi

$$u'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu u^\nu \tag{4.46}$$

untuk setiap $\mu \in \{0,1,2,3\}$, serta ν bergerak ke indeks $0,1,2,3$.

Kedua ruas persamaan (4.46) dapat dikalikan dengan $\vec{e}_\mu$ kemudian dijumlahkan terhadap indeks μ, menjadi (dengan $\overrightarrow{u} := u^\rho\vec{e}_\rho$)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u}' &:= u'^\mu\vec{e}_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu u^\nu\vec{e}_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\delta^\nu{}_\rho u^\rho\vec{e}_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu(\vec{e}^\nu\cdot\vec{e}_\rho)u^\rho\vec{e}_\mu \\ &= (\Lambda^\mu{}_\nu\vec{e}_\mu\otimes\vec{e}^\nu)\cdot(u^\rho\vec{e}_\rho) = \overleftrightarrow{\Lambda}\cdot\overrightarrow{u}. \end{aligned} \tag{4.47}$$

Tensor $\overleftrightarrow{\Lambda} := \Lambda^\mu{}_\nu\vec{e}_\mu\otimes\vec{e}^\nu$ ini merupakan *tensor transformasi Lorentz*.

Karena $|\overrightarrow{u}'|^2 = |\overrightarrow{u}|^2 = -c^2$, maka

$$\begin{aligned} u'^\mu u'_\mu = u^\nu u_\nu &\Leftrightarrow \Lambda^\mu{}_\rho u^\rho g_{\mu\sigma}u'^\sigma = u^\nu g_{\nu\rho}u^\rho \\ &\Leftrightarrow \Lambda^\mu{}_\rho u^\rho g_{\mu\sigma}\Lambda^\sigma{}_\alpha u^\alpha = u^\nu g_{\nu\rho}u^\rho \\ &\Leftrightarrow \Lambda^\mu{}_\rho g_{\mu\sigma}\Lambda^\sigma{}_\alpha u^\rho u^\alpha = g_{\alpha\rho}u^\rho u^\alpha \\ &\Leftrightarrow \Lambda^\mu{}_\rho g_{\mu\sigma}\Lambda^\sigma{}_\alpha = g_{\alpha\rho} \end{aligned} \tag{4.48}$$

yang merupakan syarat agar tensor $\overleftrightarrow{\Lambda}$ merupakan transformasi Lorentz.

Dari persamaan (4.44), (4.45), dan (4.47), diperoleh bentuk eksplisit dari tensor transformasi Lorentz, yaitu

$$\overleftrightarrow{\Lambda} = \vec{e}_i\otimes\vec{e}^i + (\Gamma-1)\hat{V}\otimes\hat{V} + \Gamma(\vec{e}_0\otimes\vec{e}^0 - (\vec{V}\otimes\vec{e}^0 + \vec{e}_0\otimes\vec{V})/c). \tag{4.49}$$

4.3 Transformasi Lorentz untuk Perangkat $(\vec{u},\gamma)$, $(\vec{p},E)$, $(\vec{J},\rho)$, dan $(\vec{k},\omega)$

Kita sudah mengenal transformasi Lorentz untuk perangkat posisi-waktu, yaitu

$$d\vec{r}' = d\vec{r} + (\Gamma-1)d\vec{r}\cdot\hat{V}\hat{V} - \Gamma\vec{V}dt \tag{4.50}$$

dan

$$dt' = \Gamma(dt - d\vec{r}\cdot\vec{V}/c^2) \tag{4.51}$$

di mana $\vec{r}' \in \mathbb{R}^3$ adalah posisi partikel menurut kerangka acuan O, $\vec{r}' \in \mathbb{R}^3$ adalah posisi partikel menurut kerangka acuan O', $\vec{V} \in \mathbb{R}^3$ adalah kecepatan O' menurut O, $t \in \mathbb{R}$ adalah waktu menurut O, $t' \in \mathbb{R}$ adalah waktu menurut O', $\hat{V} := \vec{V}/|\vec{V}|$, dan $\Gamma := 1/\sqrt{1-(|\vec{V}|/c)^2}$. Di sini, c adalah tetapan kelajuan cahaya dalam ruang hampa.

Apabila $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ adalah kecepatan partikel menurut O dan $\vec{v}' \in \mathbb{R}^3$ adalah kecepatan partikel menurut O', maka $\vec{u} := d\vec{r}/d\tau = \gamma\vec{v}$ adalah swa-kecepatan partikel menurut O dan $\vec{u}' := d\vec{r}'/d\tau = \gamma'\vec{v}'$ adalah swa-kecepatan partikel menurut

O', di mana $\gamma := 1/\sqrt{1-(|\vec{v}|/c)^2}$ dan $\gamma' := 1/\sqrt{1-(|\vec{v}'|/c)^2}$. Di sini, $\tau \in \mathbb{R}$ adalah swa-waktu milik partikel tersebut sedemikian $dt/d\tau = \gamma$ dan $dt'/d\tau = \gamma'$. Oleh karena itu,

$$\vec{u}' = \vec{u} + (\Gamma - 1)\vec{u}\cdot\hat{V}\hat{V} - \Gamma\vec{V}\gamma \tag{4.52}$$

dan

$$\gamma' = \Gamma(\gamma - \vec{u}\cdot\vec{V}/c^2). \tag{4.53}$$

Dengan mengalikan kedua ruas persamaan terakhir ini dengan massa rehat partikel, yaitu $m_0 \in \mathbb{R}^+$, serta dengan mengingat bahwa $\vec{p} := m\vec{v} = m_0\vec{u}$ adalah momentum partikel tersebut menurut O dan $\vec{p}' := m'\vec{v}' = m_0\vec{u}'$ adalah momentum partikel menurut O', di mana $m := m_0\gamma$ adalah massa relativistik partikel menurut O dan $m' := m_0\gamma'$ adalah massa relativistik partikel menurut O', maka diperoleh

$$\vec{p}' = \vec{p} + (\Gamma - 1)\vec{p}\cdot\hat{V}\hat{V} - \Gamma\vec{V}E/c^2 \tag{4.54}$$

dan

$$E' = \Gamma(E - \vec{p}\cdot\vec{V}), \tag{4.55}$$

di mana $E := mc^2$ adalah energi relativistik partikel menurut O dan $E' := m'c^2$ adalah energi relativistik partikel menurut O'.

Karena $\vec{J} := \rho\vec{v} = \rho_0\vec{u}$ adalah rapat arus listrik menurut O dan $\vec{J}' := \rho'\vec{v}' = \rho_0\vec{u}$ adalah rapat arus listrik menurut O', serta $\rho := \gamma\rho_0$ adalah rapat muatan listrik menurut O dan $\rho' := \gamma'\rho_0$ adalah rapat muatan listrik menurut O', di mana $\rho_0 \in \mathbb{R}$ adalah swa-rapat muatan listrik, maka diperoleh

$$\vec{J}' = \vec{J} + (\Gamma - 1)\vec{J}\cdot\hat{V}\hat{V} - \Gamma\vec{V}\rho \tag{4.56}$$

dan

$$\rho' = \Gamma(\rho - \vec{J}\cdot\vec{V}/c^2). \tag{4.57}$$

Dari kaitan Planck, yaitu $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, $\vec{p}' = \hbar\vec{k}'$, $E = \hbar\omega$, dan $E' = \hbar\omega'$, di mana $\hbar$ adalah tetapan Planck tereduksi, $\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ adalah vektor gelombang menurut O, $\vec{k}' \in \mathbb{R}^3$ adalah vektor gelombang menurut O', $\omega \in \mathbb{R}$ adalah frekuensi sudut gelombang menurut O, dan $\omega' \in \mathbb{R}$ adalah frekuensi sudut menurut O', maka diperoleh

$$\vec{k}' = \vec{k} + (\Gamma - 1)\vec{k}\cdot\hat{V}\hat{V} - \Gamma\vec{V}\omega/c^2 \tag{4.58}$$

dan

$$\omega' = \Gamma(\omega - \vec{k}\cdot\vec{V}). \tag{4.59}$$

4.4 Transformasi Lorentz untuk Operator Turunan

Transformasi Lorentz untuk perangkat momentum-energi adalah

$$\vec{p}' = \vec{p} + (\Gamma - 1)\vec{p}\cdot\hat{V}\hat{V} - \Gamma\vec{V}E/c^2 \tag{4.60}$$

dan

$$E' = \Gamma(E - \vec{V}\cdot\vec{p}) \tag{4.61}$$

di mana $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ adalah momentum partikel menurut kerangka acuan O, $\vec{p}' \in \mathbb{R}^3$ adalah momentum partikel menurut kerangka acuan O', $E \in \mathbb{R}$ adalah energi relativistik partikel menurut O, $E' \in \mathbb{R}$ adalah energi relativistik partikel menurut O',

$\Gamma := [1-(V/c)^2]^{-1/2}$ adalah faktor Lorentz, $V := |\vec{V}|$ adalah kelajuan O' menurut O, $\vec{V} \in \mathbb{R}^3$ adalah kecepatan O' menurut O, $\hat{V} := \vec{V}/V$ adalah arah dari $\vec{V}$, dan c adalah tetapan kelajuan cahaya dalam ruang hampa. Penggantian (pengkuantuman) $\vec{p} \mapsto -i\hbar\nabla$, $E \mapsto i\hbar\partial/\partial t$, $\vec{p}' \mapsto -i\hbar\nabla'$, dan $E' \mapsto i\hbar\partial/\partial t'$, di mana $\nabla := \partial/\partial\vec{r}$, $\nabla' := \partial/\partial\vec{r}'$, $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ adalah posisi partikel menurut O, $\vec{r}' \in \mathbb{R}^3$ adalah posisi partikel menurut O', dan $t \in \mathbb{R}$ adalah waktu, serta $i := \sqrt{-1}$ adalah bilangan khayal satuan, dan $\hbar$ adalah tetapan Planck tereduksi, menghasilkan

$$-i\hbar\nabla' = -i\hbar\nabla - i\hbar(\Gamma-1)\hat{V}\hat{V}\cdot\nabla - i\hbar\Gamma c^{-2}\vec{V}\partial/\partial t \tag{4.62}$$

dan

$$i\hbar\partial/\partial t' = \Gamma(i\hbar\partial/\partial t' + i\hbar\vec{V}\cdot\nabla). \tag{4.63}$$

Kedua persamaan terakhir dapat diubah menjadi

$$\nabla' = \nabla + (\Gamma-1)\hat{V}\hat{V}\cdot\nabla + \Gamma c^{-2}\vec{V}\partial/\partial t \tag{4.64}$$

dan

$$\partial/\partial t' = \Gamma(\partial/\partial t + \vec{V}\cdot\nabla). \tag{4.65}$$

Kedua persamaan terakhir merupakan transformasi Lorentz untuk turunan terhadap variabel ruang dan waktu.

4.5 Panjang, Luas, dan Volume Relativistik

Panjang sebuah kurva $C \subset \mathbb{R}^3$ yang bergerak dengan kecepatan $\vec{v}$ adalah

$$L = \int_C \sqrt{(d\vec{r}\cdot\hat{v})^2/\gamma^2 + |d\vec{r} - d\vec{r}\cdot\hat{v}\hat{v}|^2} = \int_C \sqrt{|d\vec{r}|^2 - (d\vec{r}\cdot\vec{v})^2/c^2} \tag{4.66}$$

di mana $\vec{r} \in C$, $\hat{v} := \vec{v}/v$, $v := |\vec{v}|$, $\gamma := 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$, dan c adalah kelajuan cahaya dalam ruang hampa.

Luas sebuah permukaan $S \subset \mathbb{R}^3$ yang bergerak dengan kecepatan $\vec{v}$ adalah

$$A = \int_S \sqrt{(d^2\vec{r}\cdot\hat{v})^2 + |d^2\vec{r} - d^2\vec{r}\cdot\hat{v}\hat{v}|^2/\gamma^2} = \int_S \sqrt{|d^2\vec{r}|^2 - |d^2\vec{r}\times\vec{v}|^2/c^2} \tag{4.67}$$

di mana $\vec{r} \in S$, $\hat{v} := \vec{v}/v$, $v := |\vec{v}|$, $\gamma := 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$, dan c adalah kelajuan cahaya dalam ruang hampa.

Volume sebuah bangun ruang $W \subseteq \mathbb{R}^3$ yang bergerak dengan kecepatan $\vec{v}$ adalah

$$V = \int_W |d^3\vec{r}|/\gamma \tag{4.68}$$

di mana $\vec{r} \in W$, $\hat{v} := \vec{v}/v$, $v := |\vec{v}|$, $\gamma := 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$, dan c adalah kelajuan cahaya dalam ruang hampa.

4.6 Bukti Relativitas Volume Sebarang Bangun Ruang

Volume sebuah partisi $d^3\vec{r} := dx \wedge dy \wedge dz$ dari bangun ruang $W \subseteq \mathbb{R}^3$ yang bergerak dengan kecepatan $\vec{v}$ adalah $d^3\vec{R} := dX \wedge dY \wedge dZ$ yang merupakan partisi dari bangun ruang $W' \subseteq \mathbb{R}^3$, sedemikian rupa

$$dX = (d\vec{r} + (1/\gamma - 1)d\vec{r} \cdot \hat{v}\hat{v}) \cdot \hat{x} = dx + (1/\gamma - 1)d\vec{r} \cdot \hat{v}n_x, \tag{4.69}$$

$$dY = (d\vec{r} + (1/\gamma - 1)d\vec{r} \cdot \hat{v}\hat{v}) \cdot \hat{y} = dy + (1/\gamma - 1)d\vec{r} \cdot \hat{v}n_y, \tag{4.70}$$

$$dZ = (d\vec{r} + (1/\gamma - 1)d\vec{r} \cdot \hat{v}\hat{v}) \cdot \hat{z} = dz + (1/\gamma - 1)d\vec{r} \cdot \hat{v}n_z, \tag{4.71}$$

di mana $\vec{r} := (x, y, z) \in W$, $\vec{R} := (X, Y, Z) \in W'$, $\hat{v} := \vec{v}/v$, $v := |\vec{v}|$, $\gamma := 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$, c adalah kelajuan cahaya dalam ruang hampa, $\hat{x} := (1, 0, 0)$, $\hat{y} := (0, 1, 0)$, $\hat{z} := (0, 0, 1)$, dan $\hat{v} := (n_x, n_y, n_z)$.

Oleh karena itu,

$$d^3\vec{R} = (dx + (1/\gamma - 1)d\vec{r} \cdot \hat{v}n_x) \wedge (dy + (1/\gamma - 1)d\vec{r} \cdot \hat{v}n_y) \wedge (dz + (1/\gamma - 1)d\vec{r} \cdot \hat{v}n_z).$$

Karena $d\vec{r} \cdot \hat{v} = dx\, n_x + dy\, n_y + dz\, n_z$, maka

$$d^3\vec{R} = dx \wedge dy \wedge dz + (1/\gamma - 1)[n_z dx \wedge dy \wedge (d\vec{r} \cdot \hat{v}) + n_y dx \wedge (d\vec{r} \cdot \hat{v}) \wedge dz + n_x (d\vec{r} \cdot \hat{v}) \wedge dy \wedge dz]$$

sebab $(d\vec{r} \cdot \hat{v}) \wedge (d\vec{r} \cdot \hat{v}) = 0$. Karena $dx \wedge dx = dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0$, maka

$$d^3\vec{R} = dx \wedge dy \wedge dz + (1/\gamma - 1)(n_z^2 + n_y^2 + n_x^2) dx \wedge dy \wedge dz. \tag{4.72}$$

Karena $n_z^2 + n_y^2 + n_x^2 = 1$, maka

$$d^3\vec{R} = dx \wedge dy \wedge dz + (1/\gamma - 1) dx \wedge dy \wedge dz = dx \wedge dy \wedge dz/\gamma = d^3\vec{r}/\gamma \tag{4.73}$$

sesuai yang diharapkan.

Inilah relativitas volume untuk sebarang bangun ruang.

4.7 Membalik Kaedah Penjumlahan Kecepatan Einstein

Kaedah penjumlahan kecepatan Einstein adalah

$$\vec{v}' = \frac{\vec{v} + (\Gamma - 1)\vec{v}_{//} - \Gamma\vec{V}}{\Gamma(1 - \vec{v} \cdot \vec{V}/c^2)} \tag{4.74}$$

di mana $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ adalah kecepatan titik P menurut kerangka O, $\vec{V} \in \mathbb{R}^3$ adalah kecepatan kerangka O' menurut kerangka O, $\vec{v}' \in \mathbb{R}^3$ adalah kecepatan titik P menurut kerangka O', $\Gamma := 1/\sqrt{1 - |\vec{V}|^2/c^2}$ adalah faktor Lorentz, c adalah kelajuan cahaya dalam ruang hampa, $v_{//} := \vec{v} \cdot \hat{V}$, $\hat{V} := \vec{V}/V$, $V := |\vec{V}|$, dan $\vec{v}_{//} := v_{//}\hat{V}$.

Komponen sejajarnya adalah

$$v'_{//} = \frac{v_{//} - V}{1 - v_{//}V/c^2} \tag{4.75}$$

di mana $v'_{//} := \vec{v}' \cdot \hat{V}$.

Persamaan terakhir menjadi

$$v'_{//}(1 - v_{//}V/c^2) = v_{//} - V \tag{4.76}$$

alias

$$v'_{//} + V = v_{//}(1 + v'_{//}V/c^2) \tag{4.77}$$

alias

$$v_{//} = \frac{v'_{//} + V}{1 + v'_{//}V/c^2} \tag{4.78}$$

alias

$$\vec{v}_{//} = \frac{\vec{v}_{//} + \vec{V}}{1 + \vec{v}' \cdot \vec{V}/c^2}. \tag{4.79}$$

Komponen tegak lurusnya adalah

$$\vec{v}'_{\perp} = \frac{\vec{v}_{\perp}}{\Gamma(1 - v_{//}V/c^2)} \tag{4.80}$$

di mana $\vec{v}_{\perp} := \vec{v} - \vec{v}_{//}$ dan $\vec{v}'_{\perp} := \vec{v}' - \vec{v}'_{//}$.

Selanjutnya

$$N := 1 - \frac{v_{//}V}{c^2} = 1 - \frac{V}{c^2}\frac{v'_{//} + V}{1 + v'_{//}V/c^2}. \tag{4.81}$$

$$N = \frac{(c^2 + v'_{//}V) - V(v'_{//} + V)}{c^2 + v'_{//}V}. \tag{4.82}$$

$$N = \frac{c^2 - V^2}{c^2 + v'_{//}V}. \tag{4.83}$$

$$N = \frac{1 - V^2/c^2}{1 + v'_{//}V/c^2}. \tag{4.84}$$

$$N = \frac{1}{\Gamma^2(1 + v'_{//}V/c^2)}. \tag{4.85}$$

$$\Gamma N = \frac{1}{\Gamma(1 + v'_{//}V/c^2)} \tag{4.86}$$

sehingga

$$\vec{v}'_{\perp} = \vec{v}_{\perp}/(\Gamma N) = \vec{v}_{\perp}\Gamma(1 + v'_{//}V/c^2) \tag{4.87}$$

alias

$$\vec{v}_{\perp} = \frac{\vec{v}'_{\perp}}{\Gamma(1 + \vec{v}' \cdot \vec{V}/c^2)}. \tag{4.88}$$

Oleh karena itu,

$$\vec{v} = \vec{v}_{//} + \vec{v}_{\perp} \tag{4.89}$$

alias

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}' + (\Gamma - 1)\vec{v}'_{//} + \Gamma\vec{V}}{\Gamma(1 + \vec{v}' \cdot \vec{V}/c^2)}. \tag{4.90}$$

4.8 Transformasi Lorentz Rangkap

Andaikan ada dua buah transformasi Lorentz, yaitu

$$x' = \gamma_v(x - vt) \quad \text{dan} \quad t' = \gamma_v(t - vx/c^2), \tag{4.91}$$

serta

$$x'' = \gamma_u(x' - ut') \quad \text{dan} \quad t'' = \gamma_u(t' - ux'/c^2), \tag{4.92}$$

di mana $\gamma_v := 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, $\gamma_u := 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$, v adalah kecepatan kerangka O' menurut kerangka O, u adalah kecepatan kerangka O'' menurut kerangka O', x adalah posisi partikel menurut kerangka O, t adalah waktu menurut kerangka O, x' adalah posisi partikel menurut kerangka O', t' adalah waktu menurut kerangka O', x'' adalah posisi partikel menurut kerangka O'', dan t'' adalah waktu menurut kerangka O''.

Oleh karena itu,

$$x'' = \gamma_u(\gamma_v(x - vt) - u\gamma_v(t - vx/c^2)). \tag{4.93}$$

$$x'' = \gamma_u\gamma_v(x - vt - u(t - vx/c^2)). \tag{4.94}$$

$$x'' = \gamma_u\gamma_v[(1 + uv/c^2)x - (u + v)t]. \tag{4.95}$$

$$x'' = \gamma_u\gamma_v(1 + uv/c^2)\left[x - \frac{u + v}{1 + uv/c^2}t\right]. \tag{4.96}$$

Andaikan dimisalkan

$$G := \gamma_u\gamma_v(1 + uv/c^2). \tag{4.97}$$

Lantas,

$$G = \frac{1 + uv/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2 - v^2/c^2 + u^2v^2/c^4}}. \tag{4.98}$$

$$G = \frac{c^2 + uv}{\sqrt{c^4 - (u^2 + v^2)c^2 + u^2v^2}}. \tag{4.99}$$

$$G = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{c^4 - (u^2 + v^2)c^2 + u^2v^2}{c^4 + 2uvc^2 + u^2v^2}}}. \tag{4.100}$$

$$G = \frac{1}{\sqrt{1 - c^2\dfrac{u^2 + v^2 + 2uv}{c^4 + 2uvc^2 + u^2v^2}}}. \tag{4.101}$$

$$G=\frac{1}{\sqrt{1-c^2\frac{(u+v)^2}{(c^2+uv)^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u+v}{1+uv/c^2}\right)^2\frac{1}{c^2}}}. \tag{4.102}$$

$$G=\frac{1}{\sqrt{1-w^2/c^2}}=:\gamma_w \tag{4.103}$$

di mana

$$w:=\frac{u+v}{1+uv/c^2} \tag{4.104}$$

sehingga

$$x''=\gamma_w(x-wt). \tag{4.105}$$

Demikian pula,

$$t''=\gamma_u(\gamma_v(t-ux/c^2)-(u/c^2)\gamma_v(x-vt)). \tag{4.106}$$

$$t''=\gamma_u\gamma_v[(1+uv/c^2)t-(u+v)x/c^2]. \tag{4.107}$$

$$t''=\gamma_u\gamma_v(1+uv/c^2)\left[t-\frac{u+v}{1+uv/c^2}\frac{x}{c^2}\right]. \tag{4.108}$$

$$t''=\gamma_w(t-wx/c^2). \tag{4.109}$$

4.9 Bukti Invariansi Kelajuan Lukson terhadap Sebarang Pengamat

Lukson adalah partikel yang memiliki kelajuan sama dengan kelajuan cahaya dalam ruang hampa, yaitu c. Andaikan ada lukson berkecepatan $\vec{v}:=c\hat{v}\in\mathbb{R}^3$ menurut titik pengamat O. Andaikan pula ada titik pengamat O' yang bergerak dengan kecepatan $\vec{V}:=V\hat{V}\in\mathbb{R}^3$ menurut O, di mana $V:=|\vec{V}|$. Menurut O', lukson tersebut berkecepatan

$$\vec{v}'=\frac{\vec{v}+(\Gamma-1)\vec{v}\cdot\hat{V}\hat{V}-\Gamma\vec{V}}{\Gamma(1-\vec{v}\cdot\vec{V}/c^2)} \tag{4.110}$$

di mana $\Gamma:=1/\sqrt{1-V^2/c^2}$ sehingga

$$\vec{v}'=\frac{c\hat{v}+(\Gamma-1)c\hat{v}\cdot\hat{V}\hat{V}-\Gamma V\hat{V}}{\Gamma(1-V\hat{v}\cdot\hat{V}/c)}. \tag{4.111}$$

Oleh karena itu, $|\vec{v}'|^2=[c^2+c^2(\Gamma^2-2\Gamma+1)(\hat{v}\cdot\hat{V})^2+\Gamma^2V^2+2c^2(\Gamma-1)(\hat{v}\cdot\hat{V})^2-2c\Gamma V\hat{v}\cdot\hat{V}-2\Gamma(\Gamma-1)cV\hat{v}\cdot\hat{V}]/[\Gamma^2(1-V\hat{v}\cdot\hat{V}/c)^2]$. Selanjutnya,

$$|\vec{v}'|^2=\frac{c^2+c^2(\Gamma^2-1)(\hat{v}\cdot\hat{V})^2+\Gamma^2V^2-2\Gamma^2cV\hat{v}\cdot\hat{V}}{\Gamma^2(1-V\hat{v}\cdot\hat{V}/c)^2}. \tag{4.112}$$

Lalu, dengan membagi pembilang dan penyebut dengan Γ^2, diperoleh

$$|\vec{v}'|^2=\frac{c^2(1-V^2/c^2)+V^2(\hat{v}\cdot\hat{V})^2+V^2-2cV\hat{v}\cdot\hat{V}}{(c-V\hat{v}\cdot\hat{V})^2}c^2. \tag{4.113}$$

Kemudian, kita peroleh

$$|\vec{v}'|^2 = \frac{c^2 + V^2(\hat{v}\cdot\hat{V})^2 - 2cV\hat{v}\cdot\hat{V}}{(c - V\hat{v}\cdot\hat{V})^2}c^2 = c^2. \tag{4.114}$$

Jadi, lukson akan teramati sebagai lukson oleh sebarang pengamat.

4.10 Kecepatan Partikel menurut Lukson

Lukson merupakan partikel yang bergerak dengan kelajuan cahaya dalam ruang hampa. Andaikan kecepatan lukson menurut pengamat O adalah $\vec{V} := V\hat{V}$ di mana $V = c$ dan c adalah kelajuan cahaya dalam ruang hampa, dan $\hat{V} \in \mathbb{R}^3$ adalah sebarang vektor satuan. Andaikan pula kecepatan suatu partikel menurut O adalah $\vec{v} := v\hat{v}$ di mana $v \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dan $\hat{v} \in \mathbb{R}^3$ adalah sebarang vektor satuan pula. Oleh karena itu kecepatan partikel tersebut menurut lukson tadi adalah

$$\vec{v}' := \frac{\vec{v} + (\Gamma - 1)\vec{v}\cdot\hat{V}\hat{V} - \Gamma\vec{V}}{\Gamma(1 - \vec{v}\cdot\vec{V}/c^2)} \tag{4.115}$$

di mana $\Gamma := 1/\sqrt{1-(V/c)^2}$, sehingga

$$\vec{v}' = \frac{(\vec{v} - \vec{v}\cdot\hat{V}\hat{V})/\Gamma + \vec{v}\cdot\hat{V}\hat{V} - \vec{V}}{1 - \vec{v}\cdot\vec{V}/c^2}. \tag{4.116}$$

Karena untuk $V = c$ berlaku $1/\Gamma = 0$, maka

$$\vec{v}' = \frac{v\hat{v}\cdot\hat{V}\hat{V} - c\hat{V}}{1 - (v/c)\hat{v}\cdot\hat{V}} = -c\hat{V}. \tag{4.117}$$

Jadi, sebarang partikel akan teramati sebagai lukson oleh lukson.

Bab 5

Elektrodinamika

5.1 Hukum Coulomb Non-Relativistik

Muatan listrik merupakan sebuah besaran skalar riil yang nilainya dapat positif maupun negatif, sedangkan massa merupakan sebuah besaran skalar riil tak negatif. Muatan listrik merupakan kelipatan bulat dari $\pm e$, di mana $e := 1,6(10^{-19})\,\mathrm{C}$ merupakan muatan elementer alias muatan satu buah proton.

Andaikan di suatu ruang hampa $\mathbb{R}^3$ hanya terdapat dua buah partikel, yaitu partikel ke-1 dan partikel ke-2. Secara non-relativistik, di ruang $\mathbb{R}^3$ tersebut, gaya yang dialami oleh partikel ke-1 yang bermassa m_1 dan bermuatan q_1 yang terletak pada posisi $\vec{r}_1$, akibat partikel ke-2 yang bermassa m_2 dan bermuatan q_2 yang terletak pada posisi $\vec{r}_2$, pada waktu t adalah

$$\vec{F}_{12} := m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2-\vec{r}_1)+q_1\left(\frac{\kappa_e q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)+\dot{\vec{r}}_1\times\frac{\kappa_m q_2\dot{\vec{r}}_2\times(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}\right) \tag{5.1}$$

di mana G adalah tetapan gravitasi umum, $\kappa_e := 1/(4\pi\epsilon_0)$ dan $\kappa_m := \mu_0/(4\pi)$, dengan ϵ_0 adalah permitivitas listrik ruang hampa, dan μ_0 adalah permeabilitas magnet ruang hampa. Gaya yang dialami oleh partikel ke-2 akibat partikel ke-1 adalah

$$\vec{F}_{21} := m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)+q_2\left(\frac{\kappa_e q_1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2-\vec{r}_1)+\dot{\vec{r}}_2\times\frac{\kappa_m q_1\dot{\vec{r}}_1\times(\vec{r}_2-\vec{r}_1)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3}\right). \tag{5.2}$$

Ungkapan

$$F^C_{12} := \frac{\kappa_e q_1 q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1-\vec{r}_2) \tag{5.3}$$

merupakan *gaya Coulomb* yang dialami oleh partikel ke-1 akibat partikel ke-2.

Apabila $m_1 = m_2 = 0$ serta $q_1 \neq 0$ dan $q_2 \neq 0$, maka persamaan (5.1) menjadi

$$\kappa_e(\vec{r}_1-\vec{r}_2)+\kappa_m\dot{\vec{r}}_1\times(\dot{\vec{r}}_2\times(\vec{r}_1-\vec{r}_2)) = \vec{0} \tag{5.4}$$

alias

$$\kappa_e(\vec{r}_1-\vec{r}_2)+\kappa_m((\dot{\vec{r}}_1\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_2))\dot{\vec{r}}_2-(\dot{\vec{r}}_1\cdot\dot{\vec{r}}_2)(\vec{r}_1-\vec{r}_2)) = \vec{0} \tag{5.5}$$

alias

$$(\kappa_e-\kappa_m\dot{\vec{r}}_1\cdot\dot{\vec{r}}_2)(\vec{r}_1-\vec{r}_2)+\kappa_m(\dot{\vec{r}}_1\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_2))\dot{\vec{r}}_2 = \vec{0}, \tag{5.6}$$

serta, secara serupa, persamaan (5.2) menjadi

$$(\kappa_e - \kappa_m \dot{\vec{r}}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_2)(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \kappa_m(\dot{\vec{r}}_2 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1))\dot{\vec{r}}_1 = \vec{0}. \tag{5.7}$$

Untuk mencari $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \mapsto t$, dibutuhkan persamaan (5.6) dan (5.7), yang memberikan kesimpulan bahwa meskipun gaya yang dialami oleh partikel ke-1 dan partikel ke-2 sama-sama nol, tetapi percepatan keduanya secara umum tidak nol.

5.2 Menentukan Lokasi tempat tidak Adanya Gaya Coulomb

Andaikan terdapat dua buah muatan listrik $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ yang berturut-turut terletak di posisi $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \in \mathbb{R}^3$. Andaikan lokasi tempat muatan uji $q \in \mathbb{R}$ tidak mengalami gaya Coulomb terletak pada posisi $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$. Oleh karena itu, menurut hukum Coulomb, berlakulah kaitan

$$\kappa \frac{qq_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}(\vec{r} - \vec{r}_1) + \kappa \frac{qq_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3}(\vec{r} - \vec{r}_2) = \vec{0} \tag{5.8}$$

di mana didefinisikan $\kappa := 1/(4\pi\epsilon_0)$ dengan ϵ_0 adalah permitivitas listrik di ruang hampa $\mathbb{R}^3$.

Persamaan terakhir dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}(\vec{r} - \vec{r}_1) = \frac{q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}) \tag{5.9}$$

sehingga haruslah dipenuhi

$$\vec{r}_2 - \vec{r} = k(\vec{r} - \vec{r}_1)\,\mathrm{sgn}(q_1/q_2) \tag{5.10}$$

di mana $k \in \mathbb{R}^+$.

Dari persamaan terakhir, diperoleh

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_2 + k\vec{r}_1\,\mathrm{sgn}(q_1/q_2)}{1 + k\,\mathrm{sgn}(q_1/q_2)}. \tag{5.11}$$

Untuk mencari k, maka dibutuhkan persamaan skalar yang diperoleh dari magnitudo persamaan kedua, yaitu

$$\frac{|q_1|}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} = \frac{|q_2|}{|\vec{r}_2 - \vec{r}|^2}. \tag{5.12}$$

Dengan memasukkan persamaan ketiga ke persamaan terakhir, diperoleh

$$k^2\,\mathrm{sgn}^2(q_1/q_2) = |q_2/q_1| \tag{5.13}$$

alias

$$k = \sqrt{|q_2/q_1|}\,\mathrm{sgn}(q_2/q_1). \tag{5.14}$$

Karena k tidak boleh negatif, maka

$$k = \sqrt{|q_2/q_1|}. \tag{5.15}$$

Dengan memasukkan persamaan terakhir ini ke persamaan keempat, diperoleh

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_2 + \sqrt{|q_2/q_1|}\vec{r}_1 \operatorname{sgn}(q_1/q_2)}{1 + \sqrt{|q_2/q_1|} \operatorname{sgn}(q_1/q_2)}. \tag{5.16}$$

Persamaan ini terbukti sahih untuk berbagai macam situasi.

5.3 Medan Listrik Non-Relativistik

Secara non-relativistik, medan listrik pada posisi $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ akibat sebuah titik bermuatan q' yang terletak di posisi $\vec{r}' \in \mathbb{R}^3$ dalam ruang hampa adalah

$$\vec{E} = \frac{\kappa_e q}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}(\vec{r} - \vec{r}') \tag{5.17}$$

di mana $\kappa_e := 1/(4\pi\epsilon_0)$, di mana ϵ_0 merupakan permitivitas listrik dalam ruang hampa.

Secara non-relativistik pula, medan listrik pada posisi $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ akibat N buah titik bermuatan $q_1, \cdots, q_N$ yang berturut-turut terletak di posisi $\vec{r}'_1, \cdots, \vec{r}'_N \in \mathbb{R}^3$ dalam ruang hampa adalah

$$\vec{E} = \kappa_e \sum_{n=1}^{N} \frac{q_n}{|\vec{r} - \vec{r}'_n|^3}(\vec{r} - \vec{r}'_n). \tag{5.18}$$

Untuk agihan kontinyu, medan listrik pada posisi $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ akibat distribusi muatan berbentuk $D \subseteq \mathbb{R}^3$ di mana muatan dq' terletak di posisi $\vec{r}'$ dalam ruang hampa adalah

$$\vec{E} = \kappa_e \int_D \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dq'. \tag{5.19}$$

Apabila D merupakan sebuah kurva yang memiliki distribusi rapat muatan kurva $\lambda' \mapsto \vec{r}'$, maka $dq' = \lambda' |d\vec{r}'|$. Apabila D merupakan sebuah permukaan yang memiliki distribusi rapat muatan permukaan $\sigma' \mapsto \vec{r}'$, maka $dq' = \sigma' |d^2\vec{r}'|$. Apabila D merupakan sebuah permukaan yang memiliki distribusi rapat muatan permukaan $\rho' \mapsto \vec{r}'$, maka $dq' = \rho' |d^3\vec{r}'|$.

5.4 Hukum Gauss Non-Relativistik

Andaikan ada sebuah volume berarah $V \subseteq \mathbb{R}^3$, sehingga batasnya berupa sebuah permukaan berarah, yaitu ∂V. Andaikan pula ada barisan muatan titik, yaitu $q_1, q_2, q_3, \cdots, q_n$ dan $q'_1, q'_2, q'_3, \cdots, q'_{n'}$ yang berturut-turut terletak di posisi $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \cdots, \vec{r}_n \in V$ dan $\vec{r}'_1, \vec{r}'_2, \vec{r}'_3, \cdots, \vec{r}'_{n'} \notin V$, sehingga vektor medan listrik pada titik $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ akibat barisan muatan tersebut secara non-relativistik adalah

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\sum_{j=1}^{n} q_j \frac{\vec{r}-\vec{r}_j}{|\vec{r}-\vec{r}_j|^3} + \sum_{k=1}^{n'} q'_k \frac{\vec{r}-\vec{r}'_k}{|\vec{r}-\vec{r}'_k|^3}\right) \tag{5.20}$$

di mana ϵ_0 adalah permitivitas listrik dalam ruang hampa.

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial V} \vec{E}\cdot d^2\vec{r} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\sum_{j=1}^{n} q_j \oint_{\partial V} \frac{\vec{r}-\vec{r}_j}{|\vec{r}-\vec{r}_j|^3}\cdot d^2\vec{r} + \sum_{k=1}^{n'} q'_k \oint_{\partial V} \frac{\vec{r}-\vec{r}'_k}{|\vec{r}-\vec{r}'_k|^3}\cdot d^2\vec{r}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\sum_{j=1}^{n} q_j \int_V \nabla\cdot \frac{\vec{r}-\vec{r}_j}{|\vec{r}-\vec{r}_j|^3} d^3\vec{r} + \sum_{k=1}^{n'} q'_k \int_V \nabla\cdot \frac{\vec{r}-\vec{r}'_k}{|\vec{r}-\vec{r}'_k|^3} d^3\vec{r}\right) \\
&= \frac{1}{\epsilon_0}\left(\sum_{j=1}^{n} q_j \int_V \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}_j) d^3\vec{r} + \sum_{k=1}^{n'} q'_k \int_V \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}'_k) d^3\vec{r}\right) \\
&= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_{j=1}^{n} q_j
\end{aligned} \tag{5.21}$$

karena

$$\int_V \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}_j) d^3\vec{r} = 1 \tag{5.22}$$

dan

$$\int_V \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}'_k) d^3\vec{r} = 0. \tag{5.23}$$

Di sini, $\delta^{(3)}$ adalah delta Dirac 3-dimensi.

Apabila $Q_{\text{in}} := \sum_{j=1}^{n} q_j$ adalah muatan yang seluruhnya terletak pada V, maka hukum Gauss non-relativistik dapat kita tuliskan sebagai

$$\oint_{\partial V} \vec{E}\cdot d^2\vec{r} = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon_0}. \tag{5.24}$$

5.5 Potensial Listrik Non-Relativistik

Medan listrik non-relativistik $\vec{E}$ pada posisi $\vec{r}$ yang tampil pada persamaan (5.17) akibat sebuah partikel klasik bermuatan q' yang terletak pada posisi $\vec{r}'$ itu bersifat konservatif, yaitu bahwa

$$\oint_{\partial A} \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0 \tag{5.25}$$

untuk sebarang luasan $A \subset \mathbb{R}^3$.

Menurut teorema Stokes, persamaan (5.25) setara dengan

$$\int_A (\nabla\times\vec{E})\cdot d^2\vec{r} = 0 \tag{5.26}$$

untuk sebarang luasan $A \subset \mathbb{R}^3$, sehingga

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0}. \tag{5.27}$$

Penyelesaian persamaan (5.27) adalah

$$\vec{E} = -\nabla\varphi \tag{5.28}$$

untuk suatu potensial listrik skalar φ, sehingga

$$\varphi = \frac{\kappa_e q'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{5.29}$$

di mana $\kappa_e := 1/(4\pi\epsilon_0)$, di mana ϵ_0 merupakan permitivitas listrik ruang hampa.

5.6 Tenaga Listrik Non-Relativistik

Tenaga potensial listrik yang timbul antara dua partikel bermuatan q dan q' yang terpisah pada jarak R adalah

$$V = \frac{\kappa q q'}{R} \tag{5.30}$$

di mana $\kappa := 1/(4\pi\epsilon_0)$, dan ϵ_0 merupakan permitivitas listrik ruang hampa.

Tenaga potensial listrik yang timbul oleh partikel-partikel bermuatan listrik $q_1, \cdots, q_n$ yang berturut-turut terletak pada posisi $\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_n \in \mathbb{R}^3$ adalah

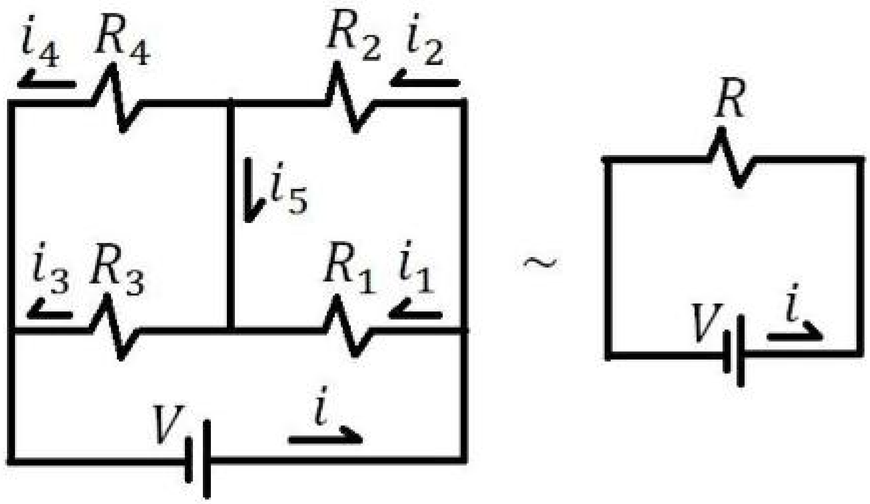
$$V = \frac{1}{2}\kappa \sum_{i,j=1; i\neq j}^{n} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}. \tag{5.31}$$

Tenaga potensial listrik yang dialami oleh partikel bermuatan listrik q yang terletak pada posisi $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ akibat oleh partikel-partikel bermuatan listrik $q_1, \cdots, q_n$ yang berturut-turut terletak pada posisi $\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_n \in \mathbb{R}^3$ adalah

$$V = \kappa q \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}. \tag{5.32}$$

5.7 Rangkaian Semacam Jembatan Wheatstone

Pada gambar 5.1, tampak sebuah rangkaian listrik semacam jembatan Wheatstone, hanya bedanya, pada rangkaian ini, penggal kawat yang dilalui arus i_5 hambatannya nol. Rangkaian di sebelah kanan adalah rangkaian setara dari rangkaian yang di sebelah kiri. Andaikan telah diketahui R_1, R_2, R_3, R_4, dan V, kemudian akan dicari i, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, dan R. Dari hukum tegangan dan arus



Gambar 5.1: Rangkaian Semacam Jembatan Wheatstone

Kirchoff, diperoleh seperangkat sitem persamaan yaitu sebagai berikut.

$$-V + i_1R_1 + i_3R_3 = 0. \tag{5.33}$$
$$i_2R_2 - i_1R_1 = 0. \tag{5.34}$$
$$i_4R_4 - i_3R_3 = 0. \tag{5.35}$$
$$-i + i_1 + i_2 = 0. \tag{5.36}$$
$$-i_2 + i_4 + i_5 = 0. \tag{5.37}$$
$$-i_5 + i_3 - i_1 = 0. \tag{5.38}$$
$$i - i_4 - i_3 = 0. \tag{5.39}$$
$$-V + iR = 0. \tag{5.40}$$

Apabila sistem persamaan ini diselesaikan untuk i, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, dan R, maka antara lain diperoleh hasil-hasil sebagai berikut.

$$i = V\frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4}. \tag{5.41}$$
$$R = \frac{R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}. \tag{5.42}$$
$$i_5 = V\frac{R_1R_4 - R_2R_3}{R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4}. \tag{5.43}$$

Dari hasil tersebut, dapat ditarik kesimpulan bahwa ternyata hambatan pengganti R sistem tersebut tidak lain adalah $R = (R_1//R_2) + (R_3//R_4)$, serta bahwa ternyata i_5 akan bernilai nol apabila $R_1R_4 = R_2R_3$. Tegangan penggal kawat yang dilalui arus i_5 tentu saja selalu sama dengan nol, berapapun besarnya i_5, sebab pada penggal kawat tersebut hambatannya nol, sesuai dengan hukum Ohm.

5.8 Medan Listrik yang Ditimbulkan oleh Distribusi Muatan Berbentuk Penggal Garis Lurus Terhingga

Andaikan di ruang $\mathbb{R}^3$ ada muatan dengan distribusi berbentuk penggal garis terhingga dengan rapat muatan $\lambda \in \mathbb{R}$, yaitu

$$L(a,b) := \{(0,0,z') \mid a < z' < b\} \tag{5.44}$$

di mana $a, b \in \mathbb{R}$ dan $a < b$.

Posisi titik pada $L(a,b)$ adalah $\vec{r}' := z'\hat{z}$ di mana $\hat{z} := (0,0,1)$.

Posisi sebarang titik pada ruang $\mathbb{R}^3$ adalah

$$\vec{r} := \hat{x} l \cos\phi + \hat{y} l \sin\phi + \hat{z} z \tag{5.45}$$

di mana $\hat{x} := (1,0,0)$, $\hat{y} := (0,1,0)$, $l \in \mathbb{R}^+$, $\phi \in \{0\} \cup (0, 2\pi)$, dan $z \in \mathbb{R}$.

Medan listrik yang terjadi di titik $\vec{r}$ tentu saja adalah

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dz' \tag{5.46}$$

di mana ϵ_0 merupakan permitivitas listrik dalam ruang hampa.

Tentu saja,

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{\hat{x} l \cos\phi + \hat{y} l \sin\phi + \hat{z}(z - z')}{[l^2 + (z - z')^2]^{3/2}} dz' = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z}. \tag{5.47}$$

Tentu saja,

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} (l \cos\phi) \int_a^b \frac{dz'}{[l^2 + (z - z')^2]^{3/2}}. \tag{5.48}$$

Dengan substitusi $z - z' = l \tan\alpha$, maka diperoleh $-dz' = l \sec^2\alpha \, d\alpha$. Nilai α_a dan α_b didefinisikan sedemikian $z - a = l \tan\alpha_a$ dan $z - b = l \tan\alpha_b$, sehingga

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} (l \cos\phi) \int_{\alpha_a}^{\alpha_b} \frac{-l \sec^2\alpha \, d\alpha}{l^3 \sec^3\alpha}. \tag{5.49}$$

$$E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 l} (\cos\phi) \int_{\alpha_a}^{\alpha_b} \cos\alpha \, d\alpha. \tag{5.50}$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 l} (\cos\phi)(\sin\alpha_a - \sin\alpha_b). \tag{5.51}$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 l} \left(\frac{z - a}{\sqrt{l^2 + (z - a)^2}} - \frac{z - b}{\sqrt{l^2 + (z - b)^2}} \right) \cos\phi. \tag{5.52}$$

Dengan penalaran yang sama, diperoleh

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 l} \left(\frac{z - a}{\sqrt{l^2 + (z - a)^2}} - \frac{z - b}{\sqrt{l^2 + (z - b)^2}} \right) \sin\phi. \tag{5.53}$$

Komponen yang lain adalah

$$E_z = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b \frac{z-z'}{[l^2+(z-z')^2]^{3/2}}dz'. \tag{5.54}$$

$$E_z = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{\alpha_a}^{\alpha_b} \frac{l\tan\alpha}{l^3\sec^3\alpha}(-1)l\sec^2\alpha\, d\alpha. \tag{5.55}$$

$$E_z = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 l}\int_{\alpha_a}^{\alpha_b} \sin\alpha\, d\alpha. \tag{5.56}$$

$$E_z = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 l}(\cos\alpha_b - \cos\alpha_a). \tag{5.57}$$

$$E_z = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 l}\left(\frac{l}{\sqrt{l^2+(z-b)^2}} - \frac{l}{\sqrt{l^2+(z-a)^2}}\right). \tag{5.58}$$

$$E_z = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{l^2+(z-b)^2}} - \frac{1}{\sqrt{l^2+(z-a)^2}}\right). \tag{5.59}$$

Misalkan $b = L \to \infty$ dan $a = -L \to -\infty$, maka

$$E_z = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\lim_{L\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{l^2+(z-L)^2}} - \frac{1}{\sqrt{l^2+(z+L)^2}}\right) = 0. \tag{5.60}$$

$$E_l := E_x\sec\phi = E_y\csc\phi = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 l}\lim_{L\to\infty}\left(\frac{z+L}{\sqrt{l^2+(z+L)^2}} - \frac{z-L}{\sqrt{l^2+(z-L)^2}}\right). \tag{5.61}$$

$$E_l = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 l} \tag{5.62}$$

sesuai yang diharapkan.

5.9 Medan Listrik akibat Distribusi Muatan Berbentuk Lingkaran

Andaikan di ruang $\mathbb{R}^3$ ada muatan berdistribusi sebuah lingkaran dengan rapat muatan $\lambda \in \mathbb{R}$, yaitu

$$S^1(R) := \{R(\cos\phi', \sin\phi', 0) \mid \phi' \in \{0\}\cup(0,2\pi)\} \tag{5.63}$$

di mana $R \in \mathbb{R}^+$ adalah jari-jari lingkaran tersebut.

Posisi titik pada $S^1(R)$ tentu saja adalah

$$\vec{r}' := \hat{x}R\cos\phi' + \hat{y}R\sin\phi' \tag{5.64}$$

di mana $\phi' \in \{0\}\cup(0,2\pi)$, $\hat{x} := (1,0,0)$, dan $\hat{y} := (0,1,0)$.

Posisi sebarang titik di ruang $\mathbb{R}^3$ tentu saja adalah

$$\vec{r} := \hat{x} l \cos\phi + \hat{y} l \sin\phi + \hat{z} z \tag{5.65}$$

di mana $\hat{z} := (0,0,1)$, $l \in \mathbb{R}^+$, $\phi \in \{0\} \cup (0, 2\pi)$, dan $z \in \mathbb{R}$.

Tentu saja,

$$\vec{r} - \vec{r}' = \hat{x}(l\cos\phi - R\cos\phi') + \hat{y}(l\sin\phi - R\sin\phi') + \hat{z}z \tag{5.66}$$

sehingga

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = l^2 + R^2 - 2lR\cos(\phi - \phi') + z^2. \tag{5.67}$$

Medan listrik di titik $\vec{r}$ tentu saja adalah

$$\vec{E} = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\phi' \tag{5.68}$$

alias

$$\vec{E} = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\hat{x}(l\cos\phi - R\cos\phi') + \hat{y}(l\sin\phi - R\sin\phi') + \hat{z}z}{[l^2 + R^2 - 2lR\cos(\phi - \phi') + z^2]^{3/2}} d\phi'. \tag{5.69}$$

di mana ϵ_0 adalah permitivitas listrik di ruang hampa.

Untuk mempermudah analisa, kita ambil kasus khusus, yaitu $l = 0$, sehingga

$$\vec{E} = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{-\hat{x}R\cos\phi' - \hat{y}R\sin\phi' + \hat{z}z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} d\phi' = \hat{x}E_x + \hat{y}E_y + \hat{z}E_z. \tag{5.70}$$

$$E_x = -\frac{\lambda R^2}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \cos\phi' \, d\phi' = 0 = E_y. \tag{5.71}$$

$$E_z = \frac{\lambda R z}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\lambda R z}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}}. \tag{5.72}$$

Apabila $z = 0$, maka $E_z = 0$, sesuai yang diharapkan.

5.10 Medan Listrik akibat Muatan Berbentuk Sebagian Busur Lingkaran

Andaikan di ruang $\mathbb{R}^3$ ada muatan yang terdistribusi homogen dengan rapat muatan $\lambda \in \mathbb{R}$ berbentuk sebagian busur lingkaran, yaitu

$$C(R, \phi) := \{R(\cos\phi', \sin\phi', 0) \mid \phi' \in (0, \phi)\} \tag{5.73}$$

di mana $R \in \mathbb{R}^+$ dan $\phi \in \{0\} \cup (0, 2\pi)$.

Posisi titik pada $C(R, \phi)$ adalah

$$\vec{r}' := R(\hat{x}\cos\phi' + \hat{y}\sin\phi') \tag{5.74}$$

di mana $\hat{x} := (1,0,0)$ dan $\hat{y} := (0,1,0)$.

Kita akan mencari medan listrik $\vec{E}$ di titik $\vec{r} := (0,0,0)$, yaitu

$$\vec{E} = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\phi}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}d\phi' \tag{5.75}$$

di mana ϵ_0 adalah permitivitas listrik di ruang hampa.

Selanjutnya,

$$\vec{E} = -\frac{\lambda R^2}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\phi}\frac{\hat{x}\cos\phi' + \hat{y}\sin\phi'}{R^3}d\phi'. \tag{5.76}$$

$$\vec{E} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}\int_0^{\phi}(\hat{x}\cos\phi' + \hat{y}\sin\phi')d\phi' = \hat{x}E_x + \hat{y}E_y + \hat{z}E_z. \tag{5.77}$$

Tentu saja, $E_z = 0$, sedangkan komponen yang lain adalah

$$E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}\sin\phi \tag{5.78}$$

dan

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}(\cos\phi - 1). \tag{5.79}$$

Apabila $\phi = 0$ atau $\phi = 2\pi$, maka $E_x = E_y = 0$ sesuai dengan yang diharapkan.

5.11 Medan Listrik akibat Muatan Berbentuk Cakram

Andaikan di ruang $\mathbb{R}^3$ ada sebuah muatan yang berbentuk cakram dengan rapat muatan luasan $\sigma \in \mathbb{R}$ yang konstan, yaitu

$$D^2(R) := \{(x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 < R^2\} \tag{5.80}$$

di mana $R \in \mathbb{R}^+$ adalah jari-jari cakram tersebut.

Posisi titik pada $D^2(R)$ adalah

$$\vec{r}' := \hat{x}l'\cos\phi' + \hat{y}l'\sin\phi' \tag{5.81}$$

di mana $l' \in [0,R]$ dan $\phi' \in \{0\} \cup (0,2\pi)$, serta $\hat{x} := (1,0,0)$ dan $\hat{y} := (0,1,0)$.

Posisi titik di ruang $\mathbb{R}^3$ adalah

$$\vec{r} := \hat{x}l\cos\phi + \hat{y}l\sin\phi + \hat{z}z \tag{5.82}$$

di mana $l \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $\phi \in \{0\} \cup (0,2\pi)$, dan $z \in \mathbb{R}$, serta $\hat{z} := (0,0,1)$.

Tentu saja,

$$\vec{r} - \vec{r}' = \hat{x}(l\cos\phi - l'\cos\phi') + \hat{y}(l\sin\phi - l'\sin\phi') + \hat{z}z \tag{5.83}$$

sehingga

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = l^2 + l'^2 - 2ll'\cos(\phi - \phi') + z^2. \tag{5.84}$$

Medan listrik di titik $\vec{r}$ adalah

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{\hat{x}(l\cos\phi - l'\cos\phi') + \hat{y}(l\sin\phi - l'\sin\phi') + \hat{z}z}{(l^2 + l'^2 - 2ll'\cos(\phi-\phi') + z^2)^{3/2}}l'd\phi'dl' \tag{5.85}$$

di mana ϵ_0 merupakan permitivitas listrik dalam ruang hampa.

Integral terakhir susah untuk diselesaikan secara analitik sehingga untuk mudahnya, kita ambil kasus khusus $l = 0$, yaitu

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{-\hat{x}l'\cos\phi' - \hat{y}l'\sin\phi' + \hat{z}z}{(l'^2+z^2)^{3/2}}l'd\phi'dl' \tag{5.86}$$

alias

$$\vec{E} = \hat{z}\frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{l'd\phi'dl'}{(l'^2+z^2)^{3/2}} = \hat{z}\frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\int_0^R\frac{l'dl'}{(l'^2+z^2)^{3/2}}. \tag{5.87}$$

Misalkan $l'' := \sqrt{l'^2+z^2}$, maka $l''^2 = l'^2 + z^2$ sehingga dideferensialkan menjadi $l''dl'' = l'dl'$.

$$\vec{E} = \hat{z}\frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\int_{|z|}^{\sqrt{R^2+z^2}}\frac{l''dl''}{l''^3} = \hat{z}\frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\int_{|z|}^{\sqrt{R^2+z^2}} l''^{-2}dl'' \tag{5.88}$$

sehingga

$$\vec{E} = \hat{z}\frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right). \tag{5.89}$$

Jika $R \to \infty$, maka

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{z}{|z|}\hat{z} \tag{5.90}$$

sesuai yang diharapkan.

5.12 Medan Listrik akibat Muatan Berbentuk Kulit Silinder

Andaikan di ruang $\mathbb{R}^3$ ada sebuah muatan yang berbentuk kulit silinder dengan rapat muatan luasan $\sigma \in \mathbb{R}$ yang seragam, yaitu

$$C(R,a,b) := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = R^2,\ a < z < b\} \tag{5.91}$$

di mana $R \in \mathbb{R}^+$ adalah jari-jari $C(R,a,b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, dan $a < b$.

Tentu saja, posisi titik pada $C(R,a,b)$ adalah

$$\vec{r}' := \hat{x}R\cos\phi' + \hat{y}R\sin\phi' + \hat{z}z' \tag{5.92}$$

di mana $\hat{x} := (1,0,0)$, $\hat{y} := (0,1,0)$, $\hat{z} := (0,0,1)$, $\phi' \in \{0\} \cup (0,2\pi)$, dan $z' \in (a,b)$.

Posisi titik di ruang $\mathbb{R}^3$ adalah

$$\vec{r} := \hat{x}l\cos\phi + \hat{y}l\sin\phi + \hat{z}z \tag{5.93}$$

di mana $l \in \{0\} \cup \mathbb{R}^+$, $\phi \in \{0\} \cup (0,2\pi)$, dan $z \in \mathbb{R}$, sehingga

$$\vec{r} - \vec{r}' = \hat{x}(l\cos\phi - R\cos\phi') + \hat{y}(l\sin\phi - R\sin\phi') + \hat{z}(z - z') \tag{5.94}$$

lalu

$$|\vec{r}-\vec{r}'|^2 = l^2 + R^2 - 2lR\cos(\phi-\phi') + (z-z')^2. \tag{5.95}$$

Medan listrik di titik $\vec{r}$ akibat muatan $C(R,a,b)$ adalah

$$\vec{E} = \frac{\sigma R}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b\int_0^{2\pi}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}d\phi' dz'. \tag{5.96}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma R}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b\int_0^{2\pi}\frac{\hat{x}(l\cos\phi - R\cos\phi') + \hat{y}(l\sin\phi - R\sin\phi') + \hat{z}(z-z')}{(l^2+R^2-2lR\cos(\phi-\phi')+(z-z')^2)^{3/2}}d\phi' dz'. \tag{5.97}$$

Karena integral rangkap terakhir ini sulit untuk diselesaikan secara analitik, maka kita ambil kasus khusus, yaitu $l=0$, sehingga

$$\vec{E} = \frac{\sigma R}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b\int_0^{2\pi}\frac{-\hat{x}R\cos\phi' - \hat{y}R\sin\phi' + \hat{z}(z-z')}{(R^2+(z-z')^2)^{3/2}}d\phi' dz'. \tag{5.98}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}\hat{z}\int_a^b\frac{z-z'}{(R^2+(z-z')^2)^{3/2}}dz'. \tag{5.99}$$

Apabila $z-z' = R\tan\alpha$, maka $dz' = -R\sec^2\alpha\, d\alpha$, sehingga

$$\vec{E} = -\frac{\sigma R}{2\epsilon_0}\hat{z}\int_{\alpha_a}^{\alpha_b}\frac{R\tan\alpha}{R^3\sec^3\alpha}R\sec^2\alpha\, d\alpha \tag{5.100}$$

di mana $\tan\alpha_a := (z-a)/R$ dan $\tan\alpha_b := (z-b)/R$.

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z}\int_{\alpha_a}^{\alpha_b}\sin\alpha\, d\alpha = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z}(\cos\alpha_b - \cos\alpha_a). \tag{5.101}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z}\left(\frac{R}{\sqrt{R^2+(z-b)^2}} - \frac{R}{\sqrt{R^2+(z-a)^2}}\right). \tag{5.102}$$

Apabila $a\to-\infty$ dan $b\to\infty$, maka tentu saja $\vec{E}=\vec{0}$ sesuai dengan yang diharapkan.

5.13 Medan Listrik akibat Muatan Berbentuk Kulit Bola

Andaikan di ruang $\mathbb{R}^3$ ada muatan berbentuk kulit bola

$$S^2(R) := \{\vec{r}\in\mathbb{R}^3 \mid |\vec{r}| = R\} \tag{5.103}$$

yang memiliki rapat muatan luasan $\sigma\in\mathbb{R}$ yang seragam, di mana $R\in\{0\}\cup\mathbb{R}$.

Posisi titik pada $S^2(R)$ tentu saja adalah

$$\vec{r}' := R(\hat{x}\sin\theta'\cos\phi' + \hat{y}\sin\theta'\sin\phi' + \hat{z}\cos\theta') \tag{5.104}$$

di mana $\hat{x} := (1,0,0)$, $\hat{y} := (0,1,0)$, $\hat{z} := (0,0,1)$, $\theta' \in [0,\pi]$, $\phi' \in \{0\} \cup (0,2\pi)$.

Posisi sebarang titik di ruang $\mathbb{R}^3$ adalah

$$\vec{r} := r(\hat{x}\sin\theta\cos\phi + \hat{y}\sin\theta\sin\phi + \hat{z}\cos\theta) \tag{5.105}$$

di mana $r \in \{0\} \cup \mathbb{R}$, $\theta \in [0,\pi]$, dan $\phi \in \{0\} \cup (0,2\pi)$.

Selanjutnya, kita asumsikan $\theta = 0$.

Tentu saja,

$$\vec{r} - \vec{r}' = -\hat{x}R\sin\theta'\cos\phi' - \hat{y}R\sin\theta'\sin\phi' + \hat{z}(r - R\cos\theta') \tag{5.106}$$

dan

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta'. \tag{5.107}$$

Medan medan listrik di titik $\vec{r}$ akibat muatan $S^2(R)$ adalah

$$\vec{E} = \frac{\sigma R^2}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\sin\theta'\,d\phi'\,d\theta'. \tag{5.108}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0}\hat{z}\int_0^{\pi}\frac{r - R\cos\theta'}{(r^2+R^2-2rR\cos\theta')^{3/2}}\sin\theta'\,d\theta'. \tag{5.109}$$

Apabila $l^2 := r^2+R^2-2rR\cos\theta'$, maka $2l\,dl = 2rR\sin\theta'\,d\theta'$, $r - R\cos\theta' = r-(r^2+R^2-l^2)/(2r)$, dan $\sin\theta'\,d\theta' = l\,dl/(rR)$, sehingga

$$\vec{E} = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0}\hat{z}\int_{|r-R|}^{r+R}\frac{1}{l^3}\left(r - \frac{r^2+R^2-l^2}{2r}\right)\frac{l}{rR}dl. \tag{5.110}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 r}\hat{z}\int_{|r-R|}^{r+R}\left[\left(r - \frac{r^2+R^2}{2r}\right)l^{-2} + \frac{1}{2r}\right]dl. \tag{5.111}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 r}\hat{z}\left[\left(\frac{r^2+R^2}{2r} - r\right)l^{-1} + \frac{1}{2r}l\right]\Bigg|_{l=|r-R|}^{l=r+R}. \tag{5.112}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 r}\hat{z}\left[\left(\frac{r^2+R^2}{2r} - r\right)\left(\frac{1}{r+R} - \frac{1}{|r-R|}\right) + \frac{1}{2r}(r+R-|r-R|)\right]. \tag{5.113}$$

Apabila $r < R$, maka $|r-R| = R-r$, sehingga

$$\vec{E} = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 r}\hat{z}\left[\left(\frac{r^2+R^2}{2r} - r\right)\left(\frac{1}{r+R} - \frac{1}{R-r}\right) + \frac{1}{2r}(r+R-(R-r))\right] = \vec{0}. \tag{5.114}$$

Apabila $r > R$, maka $|r-R| = r-R$, sehingga

$$\vec{E} = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 r}\hat{z}\left[\left(\frac{r^2+R^2}{2r} - r\right)\left(\frac{1}{r+R} - \frac{1}{r-R}\right) + \frac{1}{2r}(r+R-(r-R))\right] \tag{5.115}$$

alias

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{z}\frac{R^2}{r^2}. \tag{5.116}$$

Karena $\sigma = Q/(4\pi R^2)$, di mana Q adalah muatan total dari $S^2(R)$, maka

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi R^2}\frac{1}{\epsilon_0}\hat{z}\frac{R^2}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{z} \tag{5.117}$$

sesuai yang diharapkan.

5.14 Medan Magnet akibat Arus Berbentuk Ruas Garis

Andaikan di ruang $\mathbb{R}^3$ ada sebuah arus berbentuk ruas garis berarah, yaitu

$$L(a,b) := \{(0,0,z) \mid a < z < b\} \tag{5.118}$$

yang mengalir dalam arah $\hat{z} := (0,0,1)$, di mana $a, b \in \mathbb{R}$ dan $a < b$. Tentu saja, posisi titik pada $L(a,b)$ adalah $\vec{r}' := z'\hat{z}$ dengan $z' \in (a,b)$.

Posisi sebarang titik di ruang $\mathbb{R}^3$ adalah

$$\vec{r} := \hat{x}l\cos\phi + \hat{y}l\sin\phi + \hat{z}z \tag{5.119}$$

di mana $\hat{x} := (1,0,0)$, $\hat{y} := (0,1,0)$, $l \in \{0\} \cup \mathbb{R}^+$, $\phi \in \{0\} \cup (0, 2\pi)$, dan $z \in \mathbb{R}$.

Tentu saja,

$$\vec{r} - \vec{r}' = \hat{x}l\cos\phi + \hat{y}l\sin\phi + \hat{z}(z - z') \tag{5.120}$$

sehingga $|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = l^2 + (z - z')^2$.

Medan magnet di titik $\vec{r}$ tentu saja adalah

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_a^b \frac{dz'\hat{z} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \tag{5.121}$$

di mana μ_0 adalah permeabilitas magnet di ruang hampa.

Tentu saja, $\hat{z} \times (\vec{r} - \vec{r}') = \hat{y}l\cos\phi - \hat{x}l\sin\phi$.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}(\hat{y}l\cos\phi - \hat{x}l\sin\phi) \int_a^b \frac{dz'}{[l^2 + (z - z')^2]^{3/2}}. \tag{5.122}$$

Andaikan $z - z' = l\tan\alpha$ maka $dz' = -l\sec^2\alpha\, d\alpha$ sehingga

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}(\hat{y}l\cos\phi - \hat{x}l\sin\phi) \int_{\alpha_a}^{\alpha_b} \frac{-l\sec^2\alpha\, d\alpha}{l^3\sec^3\alpha} \tag{5.123}$$

di mana $\tan\alpha_a := (z - a)/l$ dan $\tan\alpha_b := (z - b)/l$.

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi l}(\hat{y}\cos\phi - \hat{x}\sin\phi) \int_{\alpha_a}^{\alpha_b} \cos\alpha\, d\alpha. \tag{5.124}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi l}(\hat{y}\cos\phi - \hat{x}\sin\phi)(\sin\alpha_a - \sin\alpha_b). \tag{5.125}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi l}(\hat{y}\cos\phi - \hat{x}\sin\phi) \left(\frac{z - a}{\sqrt{l^2 + (z - a)^2}} + \frac{b - z}{\sqrt{l^2 + (z - b)^2}} \right). \tag{5.126}$$

Jika $a \to -\infty$ dan $b \to \infty$, maka

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi l}(\hat{y}\cos\phi - \hat{x}\sin\phi) \tag{5.127}$$

sesuai yang diharapkan.

5.15 Medan Magnet akibat Arus Berbentuk Lingkaran

Andaikan di ruang $\mathbb{R}^3$ ada sebuah arus berbentuk lingkaran, yaitu

$$S^1(R) := \{R(\cos\phi, \sin\phi, 0) \mid \phi \in \{0\} \cup (0, 2\pi)\} \tag{5.128}$$

yang mengalir ke arah meningkatnya nilai ϕ, di mana $R \in \mathbb{R}^+$.

Tentu saja, posisi titik pada $S^1(R)$ adalah

$$\vec{r}' := \hat{x}R\cos\phi' + \hat{y}R\sin\phi' \tag{5.129}$$

di mana $\hat{x} := (1, 0, 0)$, $\hat{y} := (0, 1, 0)$, dan $\phi' \in \{0\} \cup (0, 2\pi)$.

Posisi titik sepanjang arah $\hat{z} := (0, 0, 1)$ adalah $\vec{r} = z\hat{z}$ di mana $z \in \mathbb{R}$.

Tentu saja,

$$\vec{r} - \vec{r}' = -\hat{x}R\cos\phi' - \hat{y}R\sin\phi' + \hat{z}z \tag{5.130}$$

dan $|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = R^2 + z^2$. Demikian pula, $d\vec{r}' = R\,d\phi'(-\hat{x}\sin\phi' + \hat{y}\cos\phi')$.

$$d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = (\hat{x}z\cos\phi' + \hat{y}z\sin\phi' + \hat{z}R)R\,d\phi'. \tag{5.131}$$

Medan magnet di titik $\vec{r}$ adalah

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{S^1(R)} \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \tag{5.132}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\hat{x}z\cos\phi' + \hat{y}z\sin\phi' + \hat{z}R}{(R^2 + z^2)^{3/2}} R\,d\phi'. \tag{5.133}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} 2\pi\hat{z} = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}\hat{z}. \tag{5.134}$$

Apabila $z = 0$, maka $\vec{B} = \hat{z}\mu_0 I/(2R)$ sesuai dengan yang diharapkan.

5.16 Medan Magnet pada Solenoida

Andaikan di ruang $\mathbb{R}^3$ ada sebuah solenoida dengan N buah lilitan, yaitu

$$S(R, L) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = R^2,\ 0 < z < L\} \tag{5.135}$$

di mana $R, L \in \mathbb{R}^+$.

Posisi titik pada $S(R, L)$ tentu saja adalah

$$\vec{r}' := \hat{x}R\cos\phi' + \hat{y}R\sin\phi' + \hat{z}z' \tag{5.136}$$

di mana $\hat{x} := (1, 0, 0)$, $\hat{y} := (0, 1, 0)$, $\hat{z} := (0, 0, 1)$, $\phi' \in \{0\} \cup (0, 2\pi)$, dan $z' \in [0, L]$.

Posisi titik sepanjang sumbu solenoida tentu saja adalah $\vec{r} := \hat{z}z$ sehingga

$$\vec{r} - \vec{r}' = -\hat{x}R\cos\phi' - \hat{y}R\sin\phi' + \hat{z}(z - z') \tag{5.137}$$

maka $|\vec{r}-\vec{r}'| = R^2 + (z-z')^2$ dan $d\vec{r}' = R\,d\phi'(-\hat{x}\sin\phi' + \hat{y}\cos\phi')$.

Medan magnet di titik $\vec{r}$ tersebut tentu saja adalah

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{S(R,L)} \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dn \tag{5.138}$$

di mana μ_0 adalah permeabilitas magnet di ruang hampa, I adalah besar arus listrik, dan $dn := (N/L)dz'$.

$$d\vec{r}' \times (\vec{r}-\vec{r}') = [\hat{x}(z-z')\cos\phi' + \hat{y}(z-z')\sin\phi' + \hat{z}R]R\,d\phi'. \tag{5.139}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 IN}{4\pi L}\int_0^L\int_0^{2\pi} \frac{\hat{x}(z-z')\cos\phi' + \hat{y}(z-z')\sin\phi' + \hat{z}R}{[R^2+(z-z')^2]^{3/2}} R\,d\phi'\,dz'. \tag{5.140}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 IN}{2L}R^2\hat{z}\int_0^L \frac{dz'}{[R^2+(z-z')^2]^{3/2}}. \tag{5.141}$$

Apabila $z-z' := R\tan\alpha$, maka $dz' = -R\sec^2\alpha\,d\alpha$ sehingga

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 IN}{2L}R^2\hat{z}\int_{\alpha_0}^{\alpha_L} \frac{-R\sec^2\alpha\,d\alpha}{R^3\sec^3\alpha} \tag{5.142}$$

di mana $\tan\alpha_0 := z/R$ dan $\tan\alpha_L := (z-L)/R$.

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 IN}{2L}\hat{z}\int_{\alpha_0}^{\alpha_L} \cos\alpha\,d\alpha. \tag{5.143}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 IN}{2L}\hat{z}(\sin\alpha_0 - \sin\alpha_L). \tag{5.144}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 IN}{2L}\hat{z}\left(\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{z-L}{\sqrt{R^2+(z-L)^2}}\right). \tag{5.145}$$

Jika kita ambil kasus khusus $R \to 0$, maka

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 IN}{2L}(\operatorname{sgn} z - \operatorname{sgn}(z-L))\,\hat{z}. \tag{5.146}$$

Medan magnet di pusat solenoida, yaitu $z = L/2$, tentu saja adalah

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 IN}{L}\hat{z}, \tag{5.147}$$

serta medan magnet di ujung solenoida, yaitu $z = 0$ atau $z = L$, tentu saja adalah

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 IN}{2L}\hat{z} \tag{5.148}$$

sesuai yang diharapkan.

5.17 Medan Listrik akibat Arus Listrik

Biasanya, medan listrik itu ditimbulkan oleh sebuah distribusi muatan listrik, baik itu muatan titik $q \in \mathbb{R}$, rapat muatan linier $\lambda \in \mathbb{R}$, rapat muatan permukaan $\sigma \in \mathbb{R}$, maupun rapat muatan volume $\rho \in \mathbb{R}$. Namun, bagaimana apabila penyebab timbulnya medan listrik itu merupakan sebaran arus listrik, baik itu arus linier $I \in \mathbb{R}$, rapat arus permukaan $\vec{K} \in \mathbb{R}^3$, maupun rapat arus volume $\vec{J} \in \mathbb{R}^3$? Mungkinkah? Jawabannya adalah mungkin.

Kita telah mengetahui hubungan antara arus listrik dengan muatan listrik, yaitu $I := dq/dt$ di mana $t \in \mathbb{R}$ adalah waktu. Apabila muatan tersebut berbentuk kurva, maka $I|d\vec{r}| = (dq/dt)|d\vec{r}/dt|dt = dq\, v = \lambda|d\vec{r}|v$, di mana $v := |d\vec{r}/dt|$ adalah kelajuan linier arus listrik, sehingga $I = \lambda v$ alias $\lambda = I/v$. Apabila muatan tersebut berbentuk permukaan, maka $\vec{v}\, dq = \vec{v}\sigma|d^2\vec{r}| = \vec{K}|d^2\vec{r}|$, di mana $\vec{v} := d\vec{r}/dt$ adalah vektor kecepatan arus permukaan, sehingga $\vec{K} = \sigma\vec{v}$. Apabila muatan tersebut berbentuk volume, maka $\vec{v}\, dq = \vec{v}\rho|d^3\vec{r}| = \vec{J}|d^3\vec{r}|$, di mana $\vec{v} := d\vec{r}/dt$ adalah vektor kecepatan arus volume, sehingga $\vec{J} = \rho\vec{v}$.

5.18 Potensial Listrik akibat Konduktor Berbentuk Bola Pejal

Misalkan di ruang hampa $\mathbb{R}^3$ ada sebuah konduktor berbentuk sebuah bola pejal

$$S^2(R) := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid |\vec{r}| \le R\} \tag{5.149}$$

di mana $R \in \mathbb{R}^+$ yang seluruh muatan $Q \in \mathbb{R}$ -nya terdistribusi merata pada $\partial S^2(R)$ tersebut.

Potensial listrik di titik $\vec{r} := (0, 0, r)$, di mana $r \in \mathbb{R}^+$, tentu saja adalah

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{4\pi R^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2\sin\theta\, d\phi\, d\theta}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{5.150}$$

di mana ϵ_0 adalah permitivitas listrik dalam ruang hampa, dan

$$\vec{r}' := R(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \tag{5.151}$$

adalah posisi sebarang titik pada $\partial S^2(R)$ tersebut.

Karena

$$|\vec{r}-\vec{r}'|^2 = R^2\sin^2\theta + (r - R\cos\theta)^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta, \tag{5.152}$$

maka

$$\varphi = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta}}. \tag{5.153}$$

Apabila didefinisikan $l^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta$, dengan $l \in \mathbb{R}^+$, maka $2l\,dl = 2Rr\sin\theta\, d\theta$ alias $\sin\theta\, d\theta = l\,dl/(Rr)$ sehingga

$$\varphi = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 Rr}\int_{|r-R|}^{r+R} dl \tag{5.154}$$

alias

$$\varphi = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 Rr}[(r+R) - |r-R|]. \tag{5.155}$$

Apabila $r > R$, maka

$$\varphi = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 Rr}[(r+R) - (r-R)] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \tag{5.156}$$

serta apabila $r < R$, maka

$$\varphi = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 Rr}[(r+R) - (R-r)] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \tag{5.157}$$

sesuai yang diharapkan.

5.19 Medan Listrik Relativistik

Medan listrik relativistik $\vec{E}$ di titik $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ akibat partikel klasik bermuatan q' yang terletak di posisi $\vec{r}' \in \mathbb{R}^3$ dan berkecepatan $\vec{v}' := d\vec{r}'/dt$ pada waktu t adalah

$$\vec{E} = \frac{\kappa q' \gamma^{-2} \vec{R}}{R^3(1-\beta^2 \sin^2 \psi)^{3/2}} \tag{5.158}$$

di mana $\kappa := 1/(4\pi\epsilon_0)$ dengan ϵ_0 adalah permitivitas listrik dalam ruang hampa, $\gamma := (1-\beta^2)^{-1/2}$ adalah faktor Lorentz, $\beta := v'/c$, $v' := |\vec{v}'|$, c adalah kelajuan cahaya dalam ruang hampa, $\vec{R} := \vec{r} - \vec{r}'$, $\sin\psi := R_\perp/R$, $R := |\vec{R}|$, $\vec{R}_\perp := \vec{R} - \vec{R}_{//}$, $\vec{R}_{//} := (\vec{R}\cdot\hat{v}')\hat{v}'$, $\hat{v}' := \vec{v}'/v'$, dan $R_\perp := |\vec{R}_\perp|$.

Ternyata $\vec{E}$ pada persamaan (5.158) itu tidak konservatif, karena

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{3\kappa q' \gamma^{-2} \beta^2 (\vec{R}\cdot\vec{v}')\vec{v}' \times \vec{R}}{v'^2 R^5 (1-\beta^2 \sin^2 \psi)^{5/2}} \neq \vec{0} \tag{5.159}$$

yang berbeda dengan medan listrik non-relativistik yang konservatif.

5.20 Tegangan pada Induktor Berbentuk Solenoida

Andaikan di ruang hampa $\mathbb{R}^3$, ada sebuah solenoida

$$S(r,l) := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = r^2, z \in [-l/2, l/2]\} \tag{5.160}$$

di mana $r \in \mathbb{R}^+$ adalah jari-jari $S(r,l)$ yang sangat kecil, dan $l \in \mathbb{R}^+$ adalah panjang $S(r,l)$. Medan magnet di pusat solenoida tersebut, yaitu di titik $(0,0,0)$, adalah

$$\vec{B} = (\mu_0 IN/l)\hat{z} \in \mathbb{R}^3 \tag{5.161}$$

yang dianggap bergantung pada posisi $\vec{r} := (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ dan waktu $t \in \mathbb{R}$, di mana $\mu_0 \in \mathbb{R}^+$ adalah permeabilitas magnet di ruang hampa, $I \in \mathbb{R}$ adalah arus listrik yang hanya bergantung t, N adalah jumlah lilitan dari $S(r,l)$, dan $\hat{z} := (0,0,1)$. Lantas,

$$\partial\vec{B}/\partial t = (\mu_0 N/l)\hat{z}dI/dt. \tag{5.162}$$

Dari hukum Faraday, yaitu

$$\nabla\times\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t, \tag{5.163}$$

di mana $\vec{E}\in\mathbb{R}^3$ adalah medan listrik yang bergantung pada $\vec{r}$ dan t, diperoleh

$$\nabla\times\vec{E} = -(\mu_0 N/l)\hat{z}dI/dt. \tag{5.164}$$

Andaikan ada sebuah cakram

$$D^2(r) := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\leq r^2, z=0\}. \tag{5.165}$$

Andaikan orientasi arah dari $D^2(r)$ adalah searah dengan $\hat{z}$. Andaikan pula, tegangan listrik sepanjang $\partial D^2(r)$ adalah $\Delta\varphi$.

Dari teorema Stokes, yaitu

$$\oint_{\partial D^2(r)}\vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_{D^2(r)}(\nabla\times\vec{E})\cdot d^2\vec{r}, \tag{5.166}$$

diperoleh

$$\oint_{\partial D^2(r)}\vec{E}\cdot d\vec{r} = -(\pi r^2\mu_0 N/l)dI/dt \tag{5.167}$$

sebab

$$\int_{D^2(r)}\hat{z}\cdot d^2\vec{r} = \pi r^2. \tag{5.168}$$

Karena tegangan listrik sepanjang $\partial D^2(r)$ adalah

$$\Delta\varphi := \oint_{\partial D^2(r)}\vec{E}\cdot d\vec{r}, \tag{5.169}$$

maka diperoleh

$$\Delta\varphi = -(\pi r^2\mu_0 N/l)dI/dt. \tag{5.170}$$

Besaran $L := -\pi r^2\mu_0 N/l$ merupakan induktansi diri pada solenoida $S(r,l)$ sehingga

$$\Delta\varphi = -LdI/dt. \tag{5.171}$$

5.21 Bentuk Arus yang Sebenarnya dari Tegangan Sinusoidal pada Rangkaian Seri

Misalkan ada sebuah rangkaian yang terdiri dari sebuah sumber tegangan sinusoidal, yaitu $V := V_0 e^{i(\omega t+\phi)}\in\mathbb{R}$, sebuah resistor dengan resistansi $R\in\mathbb{R}^+$, sebuah kapasitor dengan kapasitansi $C\in\mathbb{R}^+$, dan sebuah induktor dengan induktansi $L\in\mathbb{R}^+$ yang semuanya dirangkai seri. Di sini, $V_0,\omega,\phi\in\mathbb{R}$ masing-masing adalah konstanta, $i := \sqrt{-1}$ adalah bilangan imajiner satuan, dan $t\in\mathbb{R}$ adalah waktu. Kita akan mencari arus $I\in\mathbb{R}$ yang bergantung pada t.

Dari hukum tegangan Kirchhoff, diperoleh

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\left(Q_0 + \int_0^t I\,dt\right) = V \tag{5.172}$$

di mana $Q_0 \in \mathbb{R}$ adalah sebuah konstanta. Karena $I = dQ/dt$, di mana $Q \in \mathbb{R}$ adalah muatan listrik yang bergantung pada t yang mengalir menembus tampang lintang kawat, serta Q_0 adalah nilai Q saat $t = 0$, maka persamaan terakhir dapat ditulis menjadi

$$Ld^2Q/dt^2 + RdQ/dt + C^{-1}Q = V_0 e^{i(\omega t+\phi)}. \tag{5.173}$$

Selanjutnya, Q dapat ditulis sebagai $Q := Q_p + Q_c$ sedemikian rupa sehingga

$$Ld^2Q_p/dt^2 + RdQ_p/dt + C^{-1}Q_p = V_0 e^{i(\omega t+\phi)} \tag{5.174}$$

serta

$$Ld^2Q_c/dt^2 + RdQ_c/dt + C^{-1}Q_c = 0. \tag{5.175}$$

Anzat bagi Q_p adalah $Q_p := Ae^{i(\omega t-\phi)}$ di mana $A \in \mathbb{C}$ adalah tetapan yang akan dicari kemudian. Dengan memasukkan anzat tersebut ke dalam persamaan Q_p, diperoleh

$$(-\omega^2 L + i\omega R + C^{-1})A = V_0 \tag{5.176}$$

sehingga

$$A = V_0/[\omega(-\omega L + iR + 1/(\omega C))]. \tag{5.177}$$

Oleh karena itu,

$$Q_p = V_0 e^{i(\omega t+\phi)}/[\omega(-\omega L + iR + 1/(\omega C))]. \tag{5.178}$$

Penyelesaian umum persamaan Q_c adalah

$$Q_c = \frac{[(dQ_c/dt)_0 - k_- Q_{c0}]e^{k_+ t} + [k_+ Q_{c0} - (dQ_c/dt)_0]e^{k_- t}}{k_+ - k_-} \tag{5.179}$$

di mana

$$k_\pm := \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L} \tag{5.180}$$

serta $Q_{c0} \in \mathbb{R}$ adalah nilai Q_c saat $t = 0$, dan $(dQ/dt)_0 \in \mathbb{R}$ adalah nilai dQ_c/dt saat $t = 0$. Oleh karena itu,

$$I = dQ/dt = dQ_p/dt + dQ_c/dt. \tag{5.181}$$

$$I = \frac{V_0 e^{i(\omega t+\phi)}}{R + i(\omega L - 1/(\omega C))} + \frac{k_+[(dQ_c/dt)_0 - k_- Q_{c0}]e^{k_+ t} + k_-[k_+ Q_{c0} - (dQ_c/dt)_0]e^{k_- t}}{k_+ - k_-}. \tag{5.182}$$

Impedansi dari rangkaian tersebut adalah $Z := V/I$.

Kasus khusus, apabila $Q_{c0} = 0$ dan $(dQ_c/dt)_0 = 0$, maka

$$I = V_0 e^{i(\omega t+\phi)}/[R + i(\omega L - 1/(\omega C))] \tag{5.183}$$

sehingga impedansinya adalah

$$Z = R + i[\omega L - 1/(\omega C)]. \tag{5.184}$$

Modulus dari Z adalah

$$|Z| = \sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2}. \tag{5.185}$$

Andaikan didefinisikan $X_L := i\omega L$ dan $X_C := 1/(i\omega C)$, maka diperoleh

$$Z = R + X_L + X_C \tag{5.186}$$

sesuai dengan yang diharapkan.

5.22 Metode Bayangan dalam Elektrostatika; Permukaan Bola yang Potensial Listriknya Ditanahkan

Andaikan di ruang hampa $\mathbb{R}^3$, ada dua buah muatan listrik $q_1, q_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$ yang berturut-turut terletak di posisi $\vec{r}_1 := r_1\hat{z} \in \mathbb{R}^3$ dan $\vec{r}_2 := r_2\hat{z} \in \mathbb{R}^3$ di mana $r_1, r_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$ dan $\hat{z} := (0, 0, 1)$.

Posisi seluruh permukaan bola yang berpusat di titik $(0, 0, 0)$ dan berjari-jari $R \in \mathbb{R}^+$ adalah

$$\vec{r} := R(\hat{x}\sin\theta\cos\phi + \hat{y}\sin\theta\sin\phi + \hat{z}\cos\theta) \tag{5.187}$$

di mana $\hat{x} := (1, 0, 0)$, $\hat{y} := (0, 1, 0)$, $\theta \in [0, \pi]$, dan $\phi \in \{0\} \cup (0, \pi)$.

Kita ingin agar potensial listrik yang diakibatkan oleh kedua muatan tersebut bernilai nol di seluruh permukaan bola tersebut, sehingga

$$\frac{\kappa q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{\kappa q_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} = 0 \tag{5.188}$$

di mana $\kappa := 1/(4\pi\epsilon_0)$ dengan ϵ_0 adalah permitivitas listrik dalam ruang hampa. Di sini, kita diminta untuk mencari kaitan eksplisit antara r_1, r_2, q_1, q_2 agar potensial listrik di seluruh permukaan bola tersebut tertanahkan.

Oleh karena itu,

$$q_1|\vec{r} - \vec{r}_2| = -q_2|\vec{r} - \vec{r}_1| \tag{5.189}$$

sehingga q_1 dan q_2 dalam hal ini harus berlawanan tanda.

Pengkuadratan kedua ruas persamaan terakhir menghasilkan

$$\begin{aligned} & q_1^2[R^2\sin^2\theta\cos^2\phi + R^2\sin^2\theta\sin^2\phi + (R\cos\theta - r_2)^2] \\ = \; & q_2^2[R^2\sin^2\theta\cos^2\phi + R^2\sin^2\theta\sin^2\phi + (R\cos\theta - r_1)^2] \end{aligned} \tag{5.190}$$

alias

$$q_1^2(R^2 + r_2^2 - 2Rr_2\cos\theta) = q_2^2(R^2 + r_1^2 - 2Rr_1\cos\theta). \tag{5.191}$$

Karena persamaan terakhir harus berlaku untuk semua $\theta \in [0, \pi]$, maka haruslah

$$q_1^2 r_2 = q_2^2 r_1 \quad \text{dan} \quad q_1^2(R^2 + r_2^2) = q_2^2(R^2 + r_1^2). \tag{5.192}$$

Dari persamaan terakhir, tampak bahwa r_1 dan r_2 harus bertanda sama.

Tentu saja, $q_2^2 = (r_2/r_1)q_1^2$, sehingga

$$q_1^2(R^2 + r_2^2) = (r_2/r_1)q_1^2(R^2 + r_1^2) \tag{5.193}$$

alias

$$r_1(R^2 + r_2^2) = r_2(R^2 + r_1^2) \tag{5.194}$$

alias

$$r_1 r_2^2 - (R^2 + r_1^2) r_2 + r_1 R^2 = 0 \tag{5.195}$$

alias (dengan rumus abc)

$$r_2 = \frac{R^2 + r_1^2 \pm \sqrt{(R^2 + r_1^2)^2 - 4R^2 r_1^2}}{2r_1} \tag{5.196}$$

alias

$$r_2 = \frac{R^2 + r_1^2 \pm (R^2 - r_1^2)}{2r_1} =: r_2^{\pm}. \tag{5.197}$$

Dari sini, kita peroleh

$$r_2^+ = R^2/r_1 \quad \text{dan} \quad r_2^- = r_1. \tag{5.198}$$

Karena q_1 dan q_2 harus berlawanan tanda, maka

$$q_2 = -\sqrt{r_2/r_1}\, q_1 \tag{5.199}$$

yang memiliki dua buah nilai yaitu

$$q_2^{\pm} := -\sqrt{r_2^{\pm}/r_1}\, q_1. \tag{5.200}$$

Oleh karena itu,

$$q_2^+ = -(R/|r_1|) q_1 \quad \text{dan} \quad q_2^- = -q_1. \tag{5.201}$$

Jadi, ada dua kemungkinan dari r_2 dan q_2.

5.23 Lintasan Gerak Partikel Bermuatan akibat Medan Magnet Seragam

Andaikan di $\mathbb{R}^3$ ada sebuah partikel titik klasik bermassa $m \in \mathbb{R}^+$ dan bermuatan $q \in \mathbb{R}$ yang terletak pada posisi awal $\vec{r}_0 := (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ dan berkecepatan awal $\vec{v}_0 := (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}) \in \mathbb{R}^3$, serta $z_0 = 0$ dan $v_{z0} = 0$. Partikel tersebut diimbas oleh medan magnet seragam $\vec{B} := (0, 0, B)$ di seluruh ruang $\mathbb{R}^3$ sehingga bergerak pada posisi $:= (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ yang bergantung pada waktu $t \in \mathbb{R}$. Gaya Lorentz yang dialami oleh partikel tersebut tentu saja adalah $\vec{F} := m\ddot{\vec{r}} = q\dot{\vec{r}} \times \vec{B}$ dengan asumsi bahwa medan listriknya sangat kecil. Dari perhitungan yang teliti, kita peroleh bahwa lintasan geraknya berupa lingkaran

$$S^1(X, Y, R) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - X)^2 + (y - Y)^2 = R^2; z = 0\} \tag{5.202}$$

dengan $(X, Y, 0)$ adalah pusat lingkaran tersebut, dan R adalah jari-jari lingkaran tersebut, di mana

$$X := x_0 + \frac{m}{qB} v_{y0} \quad \text{dan} \quad Y := y_0 - \frac{m}{qB} v_{x0}, \tag{5.203}$$

serta

$$R := \frac{m}{qB}\sqrt{(v_{x0})^2 + (v_{y0})^2}. \tag{5.204}$$

Lintasan yang berbentuk lingkaran tersebut merupakan lintasan gerak melingkar beraturan dengan frekuensi sudut $\omega := qB/m$.

5.24 Transformasi Lorentz untuk Medan Elektromagnetik

Andaikan ada kerangka $\tilde{K}$ yang bergerak dengan kecepatan $\vec{V}$ menurut kerangka K. Andaikan ada muatan listrik q yang bergerak dengan kecepatan $\vec{v}$ menurut kerangka K. Selanjutnya, didefinisikan besaran $\vec{Q}^0$ sebagai besaran $\vec{Q}$ yang teramati oleh muatan q tersebut, serta $\vec{Q}^0_{//} := \vec{Q} \cdot \hat{v}\hat{v}$ dan $\vec{Q}^0_{\perp} := \vec{Q}^0 - \vec{Q}^0_{//}$. Kemudian, didefinisikan $\vec{Q}_{//} := \vec{Q} \cdot \hat{V}\hat{V}$ dan $\vec{Q}_{\perp} := \vec{Q} - \vec{Q}_{//}$, serta $\tilde{\vec{Q}}_{//} := \tilde{\vec{Q}} \cdot \hat{V}\hat{V}$ dan $\tilde{\vec{Q}}_{\perp} := \tilde{\vec{Q}} - \tilde{\vec{Q}}_{//}$, untuk setiap besaran $\vec{Q}$, di mana $\tilde{\vec{Q}}$ didefinisikan sebagai besaran $\vec{Q}$ menurut K yang teramati menurut $\tilde{K}$. Gaya Coulomb elektrostatik menurut muatan q tersebut adalah $\vec{F}^0$ di mana

$$\vec{F}^0_{//} = \vec{F}_{//} \quad \text{dan} \quad \vec{F}^0_{\perp} = \gamma \vec{F}_{\perp} \tag{5.205}$$

dengan $\vec{F}$ merupakan gaya Lorentz menurut K, di mana $\gamma := 1/\sqrt{1 - |\vec{v}|^2/c^2}$ merupakan faktor Lorentz.

$$\vec{F}^0 = \vec{F}^0_{//} + \vec{F}^0_{\perp}. \tag{5.206}$$

$$\vec{F}^0 = \vec{F}_{//} + \gamma \vec{F}_{\perp} = q\vec{E}^0 \tag{5.207}$$

di mana $\vec{E}^0$ merupakan medan listrik menurut muatan q.

Gaya Lorentz menurut K tentu saja adalah

$$\vec{F} = q(\vec{E} + (\alpha/c)\vec{v} \times \vec{B}) \tag{5.208}$$

di mana $\vec{E}$ merupakan medan listrik menurut K, serta $\vec{B}$ merupakan medan magnet menurut K.

$$\vec{F}_{//} = q\vec{E}_{//}. \tag{5.209}$$

$$\vec{F}_{\perp} = q(\vec{E}_{\perp} + (\alpha/c)\vec{v} \times \vec{B}) \tag{5.210}$$

$$\vec{F}^0 = q\vec{E}_{//} + \gamma q(\vec{E}_{\perp} + (\alpha/c)\vec{v} \times \vec{B}) = q\vec{E}^0. \tag{5.211}$$

$$\vec{E}^0 = \vec{E}_{//} + \gamma(\vec{E}_{\perp} + (\alpha/c)\vec{v} \times \vec{B}). \tag{5.212}$$

Medan listrik menurut $\tilde{K}$ tentu saja adalah

$$\tilde{\vec{E}} = \vec{E}_{//} + \Gamma(\vec{E}_{\perp} + (\alpha/c)\vec{V} \times \vec{B}) \tag{5.213}$$

di mana $\Gamma := 1/\sqrt{1 - |\vec{V}|^2/c^2}$ merupakan faktor Lorentz. Ini merupakan transformasi Lorentz elektromagnetik yang pertama.

$$\vec{V} \times \tilde{\vec{E}} = \Gamma(\vec{V} \times \vec{E} + (\alpha/c)(\vec{B} \cdot \vec{V})\vec{V} - (\alpha/c)V^2\vec{B}). \tag{5.214}$$

$$\vec{V} \times \tilde{\vec{E}} = \Gamma(\vec{V} \times \vec{E} - (\alpha/c)V^2\vec{B}_{\perp}). \tag{5.215}$$

Kaitan inversi dari transformasi Lorentz elektromagnetik yang pertama tentu saja adalah

$$\vec{E} = \tilde{\vec{E}}_{//} + \Gamma(\tilde{\vec{E}}_{\perp} - (\alpha/c)\vec{V} \times \tilde{\vec{B}}). \tag{5.216}$$

Ini adalah kaitan transformasi Lorentz elektromagnetik yang kedua.

$$\vec{V} \times \vec{E} = \Gamma(\vec{V} \times \tilde{\vec{E}} - (\alpha/c)(\tilde{\vec{B}} \cdot \vec{V})\vec{V} + (\alpha/c)V^2\tilde{\vec{B}}). \tag{5.217}$$

$$\vec{V}\times\vec{E}=\Gamma(\vec{V}\times\tilde{\tilde{\vec{E}}}+(\alpha/c)V^2\tilde{\tilde{\vec{B}}}_\perp). \tag{5.218}$$

$$\vec{V}\times\vec{E}=\Gamma(\Gamma(\vec{V}\times\vec{E}-(\alpha/c)V^2\vec{B}_\perp)+(\alpha/c)V^2\tilde{\tilde{\vec{B}}}_\perp). \tag{5.219}$$

$$\Gamma^{-1}\vec{V}\times\vec{E}=\Gamma(\vec{V}\times\vec{E}-(\alpha/c)V^2\vec{B}_\perp)+(\alpha/c)V^2\tilde{\tilde{\vec{B}}}_\perp. \tag{5.220}$$

$$(\Gamma^{-1}\vec{V}\times\vec{E}-\Gamma(\vec{V}\times\vec{E}-(\alpha/c)V^2\vec{B}_\perp))(c/\alpha)/V^2=\tilde{\tilde{\vec{B}}}_\perp. \tag{5.221}$$

$$\Gamma((\Gamma^{-2}-1)\vec{V}\times\vec{E}+(\alpha/c)V^2\vec{B}_\perp)(c/\alpha)/V^2=\tilde{\tilde{\vec{B}}}_\perp. \tag{5.222}$$

$$\Gamma((-V^2/c^2)\vec{V}\times\vec{E}+(\alpha/c)V^2\vec{B}_\perp)(c/\alpha)/V^2=\tilde{\tilde{\vec{B}}}_\perp. \tag{5.223}$$

$$\tilde{\tilde{\vec{B}}}_\perp=\Gamma(\vec{B}_\perp-(\alpha c)^{-1}\vec{V}\times\vec{E}). \tag{5.224}$$

$$\tilde{\tilde{\vec{B}}}=\tilde{\vec{v}}\times\tilde{\tilde{\vec{E}}}/(\alpha c). \tag{5.225}$$

$$\tilde{\tilde{\vec{B}}}_{//}=(\alpha c)^{-1}(\tilde{\vec{v}}\times\tilde{\tilde{\vec{E}}})\cdot\hat{V}\hat{V}. \tag{5.226}$$

$$\tilde{\tilde{\vec{B}}}_{//}=(\alpha c)^{-1}[(\tilde{\vec{v}}_{//}+\tilde{\vec{v}}_\perp)\times(\tilde{\tilde{\vec{E}}}_{//}+\tilde{\tilde{\vec{E}}}_\perp)]\cdot\hat{V}\hat{V}. \tag{5.227}$$

$$\tilde{\tilde{\vec{B}}}_{//}=(\alpha c)^{-1}(\tilde{\vec{v}}_\perp\times\tilde{\tilde{\vec{E}}}_\perp)\cdot\hat{V}\hat{V}=(\alpha c)^{-1}\tilde{\vec{v}}_\perp\times\tilde{\tilde{\vec{E}}}_\perp. \tag{5.228}$$

$$\tilde{\vec{v}}_\perp=\vec{v}_\perp\Gamma^{-1}/(1-\vec{v}\cdot\vec{V}/c^2). \tag{5.229}$$

$$\tilde{\tilde{\vec{E}}}_\perp=\Gamma(\vec{E}_\perp+(\alpha/c)\vec{V}\times\vec{B}). \tag{5.230}$$

$$\tilde{\tilde{\vec{B}}}_{//}=\frac{\vec{v}_\perp}{\Gamma(1-\vec{v}\cdot\vec{V}/c^2)}\times\Gamma(\vec{E}_\perp+(\alpha/c)\vec{V}\times\vec{B})\frac{1}{\alpha c}. \tag{5.231}$$

$$\tilde{\tilde{\vec{B}}}_{//}=\frac{\vec{v}_\perp\times\vec{E}_\perp+(\alpha/c)[(\vec{v}_\perp\cdot\vec{B})\vec{V}-(\vec{v}_\perp\cdot\vec{V})\vec{B}]}{\alpha c(1-\vec{v}\cdot\vec{V}/c^2)}. \tag{5.232}$$

$$\tilde{\tilde{\vec{B}}}_{//}=\frac{\vec{v}_\perp\times\vec{E}_\perp+(\alpha/c)(\alpha c)^{-1}(\vec{v}_\perp\cdot(\vec{v}\times\vec{E}))\vec{V}}{\alpha c(1-\vec{v}\cdot\vec{V}/c^2)}. \tag{5.233}$$

$$\tilde{\tilde{\vec{B}}}_{//}=\frac{\vec{v}_\perp\times\vec{E}_\perp+c^{-2}[(\vec{v}\cdot\vec{V})(\vec{E}\times\vec{v}_\perp)+(\vec{E}\cdot\vec{V})(\vec{v}_\perp\times\vec{v})]}{\alpha c(1-\vec{v}\cdot\vec{V}/c^2)}. \tag{5.234}$$

$$\tilde{\tilde{\vec{B}}}_{//}=\frac{\vec{v}_\perp\times\vec{E}_\perp+c^{-2}[(\vec{v}\cdot\vec{V})(\vec{E}_\perp\times\vec{v}_\perp+\vec{E}_{//}\times\vec{v}_\perp)+(\vec{E}_{//}\cdot\vec{V})(\vec{v}_\perp\times\vec{v}_{//})]}{\alpha c(1-\vec{v}\cdot\vec{V}/c^2)}. \tag{5.235}$$

$$\tilde{\tilde{\vec{B}}}_{//}=\frac{\vec{v}_\perp\times\vec{E}_\perp+c^{-2}[(\vec{v}\cdot\vec{V})(\vec{E}_\perp\times\vec{v}_\perp)+[\vec{E}_{//},\vec{v}_\perp,\vec{v}_{//}]\vec{V}}{\alpha c(1-\vec{v}\cdot\vec{V}/c^2)}. \tag{5.236}$$

$$\tilde{\tilde{\vec{B}}}_{//}=(\alpha c)^{-1}\vec{v}_\perp\times\vec{E}_\perp=\vec{B}_{//}. \tag{5.237}$$

$$\tilde{\tilde{\vec{B}}}=\tilde{\tilde{\vec{B}}}_{//}+\tilde{\tilde{\vec{B}}}_\perp. \tag{5.238}$$

$$\tilde{\tilde{\vec{B}}}=\vec{B}_{//}+\Gamma(\vec{B}_\perp-(\alpha c)^{-1}\vec{V}\times\vec{E}). \tag{5.239}$$

Ini adalah kaitan transformasi Lorentz elektromagnetik yang ketiga. Inversinya adalah

$$\vec{B}=\tilde{\tilde{\vec{B}}}_{//}+\Gamma(\tilde{\tilde{\vec{B}}}_\perp+(\alpha c)^{-1}\vec{V}\times\tilde{\tilde{\vec{E}}}). \tag{5.240}$$

Ini adalah kaitan transformasi Lorentz elektromagnetik yang keempat.

Jadi, seperangkat transformasi Lorentz untuk medan elektromagnetik dapat diringkas menjadi

$$\tilde{\vec{E}} = \vec{E}_{//} + \Gamma(\vec{E}_{\perp} + (\alpha/c)\vec{V} \times \vec{B}) \tag{5.241}$$

dan

$$\tilde{\vec{B}} = \vec{B}_{//} + \Gamma(\vec{B}_{\perp} - (\alpha c)^{-1}\vec{V} \times \vec{E}). \tag{5.242}$$

Transformasi baliknya adalah

$$\vec{E} = \tilde{\vec{E}}_{//} + \Gamma(\tilde{\vec{E}}_{\perp} - (\alpha/c)\vec{V} \times \tilde{\vec{B}}) \tag{5.243}$$

dan

$$\vec{B} = \tilde{\vec{B}}_{//} + \Gamma(\tilde{\vec{B}}_{\perp} + (\alpha c)^{-1}\vec{V} \times \tilde{\vec{E}}). \tag{5.244}$$

5.25 Bentuk Kovarian dari Sistem Persamaan Maxwell

Sistem persamaan Maxwell yang paling umum adalah

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{5.245}$$

di mana

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \text{dan} \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}. \tag{5.246}$$

Dari persamaan $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, diperoleh $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, sehingga

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0} \tag{5.247}$$

yang dengan menggunakan teori tera $\nabla \times \nabla\varphi = \vec{0}$, persamaan terakhir identik dengan

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \tag{5.248}$$

Dari persamaan $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$, diperoleh

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} + \nabla \cdot \vec{P} = \rho \tag{5.249}$$

alias

$$-\epsilon_0 \left(\nabla^2\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \vec{A}\right) + \nabla \cdot \vec{P} = \rho \tag{5.250}$$

alias

$$-\epsilon_0 c(\nabla^2 A^0 + \partial_0 \nabla \cdot \vec{A}) + \nabla \cdot \vec{P} = \rho \tag{5.251}$$

alias

$$(-1/\mu_0)(\nabla^2 A^0 + \partial_0 \nabla \cdot \vec{A}) + c\nabla \cdot \vec{P} = J^0 \tag{5.252}$$

alias

$$(-1/\mu_0)(\partial_j \partial^j A^0 + \partial_0 \partial_j A^j) + c\partial_j P^j = J^0 \tag{5.253}$$

di mana $A^0 := \varphi/c$, $A^1 := A_x$, $A^2 := A_y$, $A^3 := A_z$, $J^0 := \rho c$, $J^1 := J_x$, $J^2 := J_y$, $J^3 := J_z$, $\partial_0 := (1/c)\partial/\partial t$, $\partial_1 := \partial/\partial x$, $\partial_2 := \partial/\partial y$, $\partial_3 := \partial/\partial z$, $A_\mu := g_{\mu\nu}A^\nu$, $J_\mu := g_{\mu\nu}J^\nu$, $\partial^\mu := g^{\mu\nu}\partial_\nu$, $g_{00} = -1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$, dan $(g_{\mu\nu})_{\mu\neq\nu} = 0$.

Dari persamaan $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \partial\vec{D}/\partial t$ dan $\vec{H} = (\vec{B} - \vec{M})/\mu_0$, diperoleh

$$(1/\mu_0)(\nabla \times \vec{B} - \nabla \times \vec{M}) = \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \tag{5.254}$$

alias

$$(1/\mu_0)(\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} - \nabla \times \vec{M}) = \vec{J} - \epsilon_0 \left(\nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \tag{5.255}$$

alias (dengan menerapkan identitas $\epsilon_0\mu_0c^2 = 1$)

$$\begin{aligned} & (1/\mu_0)(\partial^j\partial_k A^k - \partial_k\partial^k A^j - \epsilon^{jkl}\partial_k M_l) \\ = \;& J^j - \epsilon_0(c\partial^j\partial_0\varphi + c^2\partial_0\partial_0 A^j) + c\partial_0 P^j \\ = \;& J^j - \epsilon_0 c^2(\partial^j\partial_0 A^0 + \partial_0\partial_0 A^j) + c\partial_0 P^j \\ = \;& J^j - (1/\mu_0)(\partial^j\partial_0 A^0 + \partial_0\partial_0 A^j) + c\partial_0 P^j \end{aligned} \tag{5.256}$$

alias

$$\partial^j\partial_k A^k - \partial_k\partial^k A^j - \epsilon^{jkl}\partial_k M_l = \mu_0 J^j - \partial^j\partial_0 A^0 + \partial_0\partial^0 A^j + \mu_0 c\partial_0 P^j \tag{5.257}$$

alias

$$\partial^j\partial_\mu A^\mu - \partial_\mu\partial^\mu A^j = \mu_0 J^j + \epsilon^{jkl}\partial_k M_l + \mu_0 c\partial_0 P^j. \tag{5.258}$$

Karena dari persamaan terdahulu telah diperoleh

$$\partial_j\partial^j A^0 - \partial^0\partial_j A^j - \mu_0 c\partial_j P^j = -\mu_0 J^0 \tag{5.259}$$

alias

$$\partial^0\partial_j A^j - \partial_j\partial^j A^0 = \mu_0 J^0 - \mu_0 c\partial_j P^j \tag{5.260}$$

alias

$$\partial^0\partial_j A^j + \partial^0\partial_0 A^0 - \partial_j\partial^j A^0 - \partial_0\partial^0 A^0 = \mu_0 J^0 - \mu_0 c\partial_j P^j \tag{5.261}$$

alias

$$\partial^0\partial_\mu A^\mu - \partial_\mu\partial^\mu A^0 = \mu_0 J^0 - \mu_0 c\partial_j P^j, \tag{5.262}$$

maka diperoleh

$$\partial^\nu\partial_\mu A^\mu - \partial_\mu\partial^\mu A^\nu = \mu_0 J^\nu + C^\nu \tag{5.263}$$

alias

$$\partial_\mu(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) = \mu_0 J^\nu + C^\nu \tag{5.264}$$

alias

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = \mu_0 J^\nu + C^\nu \tag{5.265}$$

yang merupakan bentuk kovarian dari sistem persamaan Maxwell, di mana $C^j := \epsilon^{jkl}\partial_k M_l + \mu_0 c\partial_0 P^j$ dan $C^0 := -\mu_0 c\partial_j P^j$ serta $F^{\nu\mu} := \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu$.

5.26 Teorema tentang Tensor Elektromagnetik

Komponen kontravarian tensor elektromagnetik $F^{\mu\nu} := \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ memiliki padanan kovariannya, yaitu $F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ untuk setiap $\mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}$, di mana $\partial_0 := (1/c)\partial/\partial t$, $\partial_i := \partial/\partial x^i$ untuk setiap $i \in \{1, 2, 3\}$, di mana $\vec{r} := x^i \hat{x}_i$ adalah vektor posisi, $\hat{x}_1 := (1, 0, 0)$, $\hat{x}_2 := (0, 1, 0)$, $\hat{x}_3 := (0, 0, 1)$, $\partial^\mu := \eta^{\mu\nu}\partial_\nu$, di mana $\eta^{00} := -1$, $\eta^{11} = \eta^{22} = \eta^{33} = 1$, $(\eta^{\mu\nu})_{\nu\neq\mu} = 0$, $\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho} = \delta^\mu{}_\rho$, $A^0 := \varphi/c$, $A_\mu = \eta_{\mu\nu}A^\nu$, c adalah kelajuan cahaya dalam ruang hampa, dan t adalah waktu.

$$F^{00} = \partial^0 A^0 - \partial^0 A^0 = 0. \tag{5.266}$$

$$F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = -\frac{1}{c}\frac{\partial A^i}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\varphi}{c} = \frac{1}{c}E^i = -F^{i0} \tag{5.267}$$

untuk setiap $i \in \{1, 2, 3\}$.

$$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = \frac{\partial A^j}{\partial x^i} - \frac{\partial A^i}{\partial x^j} = \epsilon_{ijk}B^k = -F^{ji} \tag{5.268}$$

untuk setiap $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

$$F_{00} = \partial_0 A_0 - \partial_0 A_0 = 0. \tag{5.269}$$

$$F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = \frac{1}{c}\frac{\partial A^i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\varphi}{c} = -\frac{1}{c}E^i = -F_{i0} \tag{5.270}$$

untuk setiap $i \in \{1, 2, 3\}$.

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i = \frac{\partial A^j}{\partial x^i} - \frac{\partial A^i}{\partial x^j} = \epsilon_{ijk}B^k = -F_{ji} \tag{5.271}$$

untuk setiap $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} &= F^{00}F_{00} + F^{0i}F_{0i} + F^{i0}F_{i0} + F^{ij}F_{ij} \\ &= 0 + (E^i/c)(-E^i/c) + (-E^i/c)(E^i/c) + \epsilon_{ijk}B^k\epsilon_{ijl}B^l \\ &= 2(|\vec{B}|^2 - |\vec{E}|^2/c^2). \end{aligned} \tag{5.272}$$

Selanjutnya, andaikan ada komponen tensor

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\sigma}F^\nu{}_\sigma - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\sigma\tau}F_{\sigma\tau} \tag{5.273}$$

untuk setiap $\mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}$.

$$T^{0n} = F^{0\sigma}F^n{}_\sigma - \frac{1}{4}\eta^{0n}F^{\sigma\tau}F_{\sigma\tau} \tag{5.274}$$

untuk setiap $n \in \{1, 2, 3\}$. Karena $\eta^{0n} = 0$, maka

$$T^{0n} = F^{0\sigma}\eta_{\sigma\nu}F^{n\nu} = F^{00}\eta_{0\nu}F^{n\nu} + F^{0i}\eta_{i\nu}F^{n\nu} \tag{5.275}$$

untuk setiap $n \in \{1, 2, 3\}$. Karena $F^{00} = 0$, maka

$$T^{0n} = 0 + F^{0i}\eta_{i0}F^{n0} + F^{0i}\eta_{ij}F^{nj}. \tag{5.276}$$

Karena $\eta_{i0} = 0$, maka

$$T^{0n} = \frac{1}{c}E^i\eta_{ij}\epsilon_{njl}B^l = \frac{1}{c}E^i\epsilon_{nil}B^l = \frac{1}{c}(\vec{E}\times\vec{B})\cdot\hat{x}_n. \tag{5.277}$$

5.27 Menurunkan Hukum Arus Kirchhoff dari Hukum Ampere

Hukum arus Kirchhoff dapat diperoleh dari persamaan kontinyuitas yang diperoleh dari hukum Ampere.

Hukum Ampere adalah

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \partial \vec{D}/\partial t. \tag{5.278}$$

Pengambilan divergensi pada kedua ruas persamaan terakhir menghasilkan

$$0 = \nabla \cdot \vec{J} + \partial \rho/\partial t, \tag{5.279}$$

di mana $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ merupakan hukum Gauss.

Persamaan terakhir ini merupakan persamaan kontinyuitas untuk elektromagnetisme.

Pengintegralan kedua ruas persamaan kontinyuitas tersebut ke seluruh volume V, dengan menerapkan teorema divergensi Gauss, menghasilkan

$$0 = \oint_{\partial V} \vec{J} \cdot d^2\vec{r} + \frac{dq}{dt}, \tag{5.280}$$

di mana $q = \int_V \rho d^3\vec{r}$ adalah muatan listrik pada V.

Untuk volume V yang mendekati titik matematis yang berupa simpul, maka $\oint_{\partial V} \vec{J} \cdot d^2\vec{r} = 0$. Sementara itu $I := dq/dt = \sum_{j=1}^{n} I_j$ adalah total arus listrik yang melewati titik simpul tersebut, sehingga

$$\sum_{j=1}^{n} I_j = 0. \tag{5.281}$$

Inilah hukum arus Kirchhoff, dengan menganggap bahwa I_j bernilai positif apabila arus keluar dari simpul, dan bernilai negatif apabila arus masuk ke simpul. Kesepakatan sebaliknya bolehlah ditetapkan, asalkan konsisten.

Bab 6

Optika

6.1 Irisan Kerucut

Salah satu tempat kedudukan permukaan kerucut yang memiliki setengah sudut puncak $\beta \in (0, \pi/2)$ adalah

$$C(\beta) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = (x^2 + y^2)\cot^2\beta\}. \tag{6.1}$$

Salah satu tempat kedudukan bidang datar yang dipakai untuk mengiris $C(\beta)$ adalah

$$P(\alpha, h) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = y\tan\alpha - h\} \tag{6.2}$$

di mana $\alpha \in (0, \pi/2)$ adalah sudut kemiringan dari $P(\alpha, h)$, serta $h \in \mathbb{R}$ adalah kerendahan dari $P(\alpha, h)$.

Selanjutnya, akan dicari $C(\beta) \cap P(\alpha, h)$.

Apabila dilakukan transformasi koordinat

$$x' = x, \qquad y' = y, \qquad \text{dan} \qquad z' = z + h, \tag{6.3}$$

lalu dilanjutkan

$$x'' = x', \qquad y'' = y'\cos\alpha + z'\sin\alpha, \qquad \text{dan} \qquad z'' = -y'\sin\alpha + z'\cos\alpha, \tag{6.4}$$

kemudian dibalik menjadi

$$x' = x'', \qquad y' = y''\cos\alpha - z''\sin\alpha, \qquad \text{dan} \qquad z' = y''\sin\alpha + z''\cos\alpha, \tag{6.5}$$

serta

$$x = x' = x'', \quad y = y' = y''\cos\alpha - z''\sin\alpha, \quad \text{dan} \quad z = z' - h = y''\sin\alpha + z''\cos\alpha - h, \tag{6.6}$$

maka $C(\beta)$ menjadi

$$\begin{aligned} C''(\alpha, \beta, h) \; := \; & \{(x'', y'', z'') \in \mathbb{R}^3 \mid (y''\sin\alpha + z''\cos\alpha - h)^2 \\ & = (x''^2 + (y''\cos\alpha - z''\sin\alpha)^2)\cot^2\beta\}, \end{aligned} \tag{6.7}$$

serta $P(\alpha, h)$ menjadi

$$P'' := \{(x'', y'', z'') \in \mathbb{R}^3 \mid z'' = 0\}. \tag{6.8}$$

Andaikan $S(\alpha,\beta,h) := C''(\alpha,\beta,h) \cap P''$, maka

$$S(\alpha,\beta,h) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y\sin\alpha - h)^2 = (x^2 + y^2\cos^2\alpha)\cot^2\beta\} \tag{6.9}$$

yang merupakan salah satu bentuk *irisan kerucut*.

Apabila $\alpha = 0$, maka $S(\alpha,\beta,h)$ menjadi sebuah lingkaran.
Apabila $0 < \alpha < \pi/2 - \beta$, maka $S(\alpha,\beta,h)$ menjadi sebuah elips.
Apabila $\alpha = \pi/2 - \beta$, maka $S(\alpha,\beta,h)$ menjadi sebuah parabola.
Apabila $\pi/2 - \beta < \alpha < \pi/2$, maka $S(\alpha,\beta,h)$ menjadi sebuah hiperbola.

6.2 Vektor Pantul dan Vektor Bias

Dalam ruang hampa $\mathbb{R}^3$, sinar dengan arah rambat $\hat{\imath} \in \mathbb{R}^3$ yang mengenai sebuah bidang datar yang memiliki arah normal $\hat{N} \in \mathbb{R}^3$ akan memantul dengan arah

$$\hat{r} = \hat{\imath} - 2(\hat{\imath}\cdot\hat{N})\hat{N}. \tag{6.10}$$

Dalam ruang hampa $\mathbb{R}^3$, sinar dengan arah rambat $\hat{\imath} \in \mathbb{R}^3$ yang memasuki medium berindeks bias mutlak $n \in \mathbb{R}$, di mana bidang batas kedua medium memiliki arah normal $\hat{N} \in \mathbb{R}^3$, akan membias dengan arah

$$\hat{r} = (\hat{r}\cdot\hat{N})\hat{N} + (\hat{r} - (\hat{r}\cdot\hat{N})\hat{N}) \tag{6.11}$$

di mana (menurut hukum Snellius pembiasan)

$$\hat{\imath} - (\hat{\imath}\cdot\hat{N})\hat{N} = n(\hat{r} - (\hat{r}\cdot\hat{N})\hat{N}) \tag{6.12}$$

yang kuadrat magnitudonya adalah

$$1 - (\hat{\imath}\cdot\hat{N})^2 = n^2(1 - (\hat{r}\cdot\hat{N})^2) \tag{6.13}$$

alias

$$(\hat{r}\cdot\hat{N})^2 = 1 - n^{-2}(1 - (\hat{\imath}\cdot\hat{N})^2) \tag{6.14}$$

alias

$$\hat{r}\cdot\hat{N} = \sqrt{1 - n^{-2}(1 - (\hat{\imath}\cdot\hat{N})^2)}\,\operatorname{sgn}(\hat{r}\cdot\hat{N}). \tag{6.15}$$

Karena $\operatorname{sgn}(\hat{r}\cdot\hat{N}) = \operatorname{sgn}(\hat{\imath}\cdot\hat{N})$, maka persamaan (6.15) menjadi

$$\hat{r}\cdot\hat{N} = \sqrt{1 - n^{-2}(1 - (\hat{\imath}\cdot\hat{N})^2)}\,\operatorname{sgn}(\hat{\imath}\cdot\hat{N}). \tag{6.16}$$

Dari persamaan (6.12) dan (6.16), maka persamaan (6.11) menjadi

$$\hat{r} = \hat{N}\sqrt{1 - n^{-2}(1 - (\hat{\imath}\cdot\hat{N})^2)}\,\operatorname{sgn}(\hat{\imath}\cdot\hat{N}) + n^{-1}(\hat{\imath} - (\hat{\imath}\cdot\hat{N})\hat{N}) \tag{6.17}$$

alias

$$\hat{r} = n^{-1}\left(\hat{\imath} + \hat{N}\left(\sqrt{n^2 - 1 + (\hat{\imath}\cdot\hat{N})^2}\,\operatorname{sgn}(\hat{\imath}\cdot\hat{N}) - \hat{\imath}\cdot\hat{N}\right)\right). \tag{6.18}$$

6.3 Bayangan Titik akibat Dilatasi oleh Titik, Garis, dan Bidang

Apabila titik $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ didilatasi oleh sebuah titik $\vec{r}_0 \in \mathbb{R}^3$ dengan faktor skala $k \in \mathbb{R}$, maka bayangannya adalah $\vec{r}' \in \mathbb{R}^3$ sedemikian

$$\vec{r}' = \vec{r} + (k-1)(\vec{r} - \vec{r}_0) \tag{6.19}$$

alias

$$\vec{r}' = k\vec{r} + (1-k)\vec{r}_0. \tag{6.20}$$

Dilatasi $k = -1$ boleh dikatakan sebagai pencerminan.

Apabila titik $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ didilatasi oleh sebuah garis lurus $\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v} = \vec{0}\}$, di mana $\vec{r}_0, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, dengan faktor skala $k \in \mathbb{R}$, maka bayangannya adalah $\vec{r}' \in \mathbb{R}^3$ sedemikian

$$\vec{r}' = \vec{r} + (k-1)\hat{v} \times ((\vec{r} - \vec{r}_0) \times \hat{v}) \tag{6.21}$$

di mana $\hat{v} := \vec{v}/v$ dan $v := |\vec{v}|$.

Apabila titik $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ didilatasi oleh sebuah bidang datar $\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{N} = 0\}$, di mana $\vec{r}_0, \vec{N} \in \mathbb{R}^3$, dengan faktor skala $k \in \mathbb{R}$, maka bayangannya adalah $\vec{r}' \in \mathbb{R}^3$ sedemikian

$$\vec{r}' = \vec{r} + (k-1)(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \hat{N}\hat{N} \tag{6.22}$$

di mana $\hat{N} := \vec{N}/N$ dan $N := |\vec{N}|$.

6.4 Membalik Transformasi Dilatasi Titik oleh Bidang

Titik $\vec{r} := (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ yang di-dilatasi dengan faktor $k \in \mathbb{R}$ oleh bidang datar $\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{N} = 0\}$, di mana $\vec{N}, \vec{r}_0 \in \mathbb{R}^3$, akan memiliki bayangan

$$\vec{r}' := (x', y', z') = \vec{r} + (k-1)(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \hat{N}\hat{N}. \tag{6.23}$$

Di sini, $\hat{N} := \vec{N}/|\vec{N}| = (N_x, N_y, N_z)$.

$$\vec{r}' + (k-1)\vec{r}_0 \cdot \hat{N}\hat{N} = \vec{r} + (k-1)\vec{r} \cdot \hat{N}\hat{N}. \tag{6.24}$$

Penguraian persamaan terakhir ke dalam ketiga komponennya menghasilkan

$$\alpha_x := x' + (k-1)\vec{r}_0 \cdot \hat{N}N_x = x + (k-1)(N_x x + N_y y + N_z z)N_x, \tag{6.25}$$

$$\alpha_y := y' + (k-1)\vec{r}_0 \cdot \hat{N}N_y = y + (k-1)(N_x x + N_y y + N_z z)N_y, \tag{6.26}$$

$$\alpha_z := z' + (k-1)\vec{r}_0 \cdot \hat{N}N_z = z + (k-1)(N_x x + N_y y + N_z z)N_z. \tag{6.27}$$

Dengan sedikit pengaturan, ketiga persamaan terakhir menjadi

$$[1 + (k-1)N_x^2]x + (k-1)N_y N_x y + (k-1)N_z N_x z = \alpha_x, \tag{6.28}$$

$$(k-1)N_x N_y x + [1 + (k-1)N_y^2]y + (k-1)N_z N_y z = \alpha_y, \tag{6.29}$$

$$(k-1)N_xN_zx+(k-1)N_yN_zy+[1+(k-1)N_z^2]z=\alpha_z. \tag{6.30}$$

Penyajian matriks dari ketiga persamaan terakhir menghasilkan

$$\begin{pmatrix} 1+(k-1)N_x^2 & (k-1)N_yN_x & (k-1)N_zN_x \\ (k-1)N_xN_y & 1+(k-1)N_y^2 & (k-1)N_zN_y \\ (k-1)N_xN_z & (k-1)N_yN_z & 1+(k-1)N_z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix}. \tag{6.31}$$

Andaikan didefinisikan determinan

$$\Delta := \begin{vmatrix} 1+(k-1)N_x^2 & (k-1)N_yN_x & (k-1)N_zN_x \\ (k-1)N_xN_y & 1+(k-1)N_y^2 & (k-1)N_zN_y \\ (k-1)N_xN_z & (k-1)N_yN_z & 1+(k-1)N_z^2 \end{vmatrix}, \tag{6.32}$$

$$\Delta_x := \begin{vmatrix} \alpha_x & (k-1)N_yN_x & (k-1)N_zN_x \\ \alpha_y & 1+(k-1)N_y^2 & (k-1)N_zN_y \\ \alpha_z & (k-1)N_yN_z & 1+(k-1)N_z^2 \end{vmatrix}, \tag{6.33}$$

$$\Delta_y := \begin{vmatrix} 1+(k-1)N_x^2 & \alpha_x & (k-1)N_zN_x \\ (k-1)N_xN_y & \alpha_y & (k-1)N_zN_y \\ (k-1)N_xN_z & \alpha_z & 1+(k-1)N_z^2 \end{vmatrix}, \tag{6.34}$$

$$\Delta_z := \begin{vmatrix} 1+(k-1)N_x^2 & (k-1)N_yN_x & \alpha_x \\ (k-1)N_xN_y & 1+(k-1)N_y^2 & \alpha_y \\ (k-1)N_xN_z & (k-1)N_yN_z & \alpha_z \end{vmatrix}, \tag{6.35}$$

maka diperoleh

$$\Delta = k, \tag{6.36}$$

$$x = \Delta_x/\Delta = x' + (k^{-1}-1)(\vec{r}\,' - \vec{r}_0)\cdot\hat{N}N_x, \tag{6.37}$$

$$y = \Delta_y/\Delta = y' + (k^{-1}-1)(\vec{r}\,' - \vec{r}_0)\cdot\hat{N}N_y, \tag{6.38}$$

$$z = \Delta_z/\Delta = z' + (k^{-1}-1)(\vec{r}\,' - \vec{r}_0)\cdot\hat{N}N_z, \tag{6.39}$$

sehingga penggabungan ketiga persamaan terakhir menjadi

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + (k^{-1}-1)(\vec{r}\,' - \vec{r}_0)\cdot\hat{N}\hat{N}. \tag{6.40}$$

Inilah transformasi baliknya.

6.5 Matriks Pencerminan di Ruang $\mathbb{R}^2$

Kita akan mencerminkan titik $\vec{r} := (x, y) \in \mathbb{R}^2$ oleh garis $L(\alpha) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x \tan\alpha\}$ di mana $\alpha \in \mathbb{R}$.

Pencerminan titik $\vec{r}$ terhadap garis $L(\alpha)$ menghasilkan titik

$$\vec{r}\,' := (x', y') = \vec{r} - 2\hat{v} \times (\vec{r} \times \hat{v}) \tag{6.41}$$

di mana $\hat{v} := (\cos\alpha, \sin\alpha)$ merupakan vektor satuan yang sejajar garis $L(\alpha)$. Tentu saja,

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - 2(\vec{r} - \vec{r}\cdot\hat{v}\hat{v}) \tag{6.42}$$

alias

$$\vec{r}' = -\vec{r} + 2\vec{r}\cdot\hat{v}\hat{v} \tag{6.43}$$

sehingga

$$(x', y') = -(x, y) + 2(x\cos\alpha + y\sin\alpha)(\cos\alpha, \sin\alpha) \tag{6.44}$$

yang diuraikan perkomponennya menghasilkan

$$x' = -x + 2(x\cos^2\alpha + y\sin\alpha\cos\alpha) \tag{6.45}$$

dan

$$y' = -y + 2(x\cos\alpha\sin\alpha + y\sin^2\alpha). \tag{6.46}$$

Ini sama saja mengatakan bahwa

$$x' = x\cos 2\alpha + y\sin 2\alpha \tag{6.47}$$

dan

$$y' = x\sin 2\alpha - y\cos 2\alpha. \tag{6.48}$$

Dalam bentuk matriks, kedua persamaan terakhir menjadi

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{6.49}$$

Matriks bujur sangkar pada persamaan matrix terakhir merupakan matris pencerminan dari titik (x, y) terhadap garis $L(\alpha)$.

6.6 Cermin Cekung dan Cermin Cembung

Andaikan ada sebuah benda yang tingginya $h \in \mathbb{R}$ yang mendekati nol, yang berdiri tegak lurus sumbu utama sebuah cermin cekung dengan titik fokus yang terletak sejauh $f \in \mathbb{R}$ di depan cermin cekung tersebut. Benda tersebut terletak pada posisi $s \in \mathbb{R}$ sepanjang sumbu utama di depan cermin cekung tersebut. Bayangan yang dihasilkan oleh cermin cekung tersebut terletak pada posisi $s' \in \mathbb{R}$ sepanjang sumbu utama di depan cermin cekung tersebut. Tinggi bayangan tersebut adalah $h' \in \mathbb{R}$ yang mendekati nol. Dari pengamatan geometris sifat-sifat sinar, diperoleh

$$h/(s-f) = -h'/f \quad \text{dan} \quad h/f = -h'/(s'-f). \tag{6.50}$$

Dengan mengeliminasi h dan h' dari kedua persamaan (6.50), diperoleh

$$\begin{aligned} f/(s-f) = (s'-f)/f \quad &\Leftrightarrow \quad f^2 = (s-f)(s'-f) \quad \Leftrightarrow \quad ss' = (s+s')f \\ &\Leftrightarrow \quad 1/f = 1/s + 1/s'. \end{aligned} \tag{6.51}$$

Dari persamaan (6.51), diperoleh $s' = sf/(s-f)$, sehingga dari persamaan (6.50), diperoleh perbesaran bayangannya, yaitu

$$M := h'/h = f/(f-s) = -s'/s. \tag{6.52}$$

Bayangan dikatakan nyata apabila $s' > 0$. Bayangan dikatakan maya apabila $s' < 0$. Bayangan dikatakan tegak apabila $h' > 0$. Bayangan dikatakan terbalik apabila $h' < 0$. Bayangan dikatakan diperbesar apabila $|M| > 1$. Bayangan dikatakan sama besar apabila $|M| = 1$. Bayangan dikatakan diperkecil apabila $|M| < 1$. Pada cermin cekung, dapat dikatakan $f > 0$. Pada cermin cembung, dapat dikatakan $f < 0$.

6.7 Lensa Cembung dan Lensa Cekung

Andaikan ada sebuah benda yang tingginya $h \in \mathbb{R}$ yang mendekati nol, yang berdiri tegak lurus sumbu utama sebuah lensa cembung dengan titik fokus yang terletak sejauh $f \in \mathbb{R}$ di belakang lensa cembung tersebut. Benda tersebut terletak pada posisi $s \in \mathbb{R}$ sepanjang sumbu utama di depan lensa cembung tersebut. Bayangan yang dihasilkan oleh lensa cembung tersebut terletak pada posisi $s' \in \mathbb{R}$ sepanjang sumbu utama di belakang lensa cembung tersebut. Tinggi bayangan tersebut adalah $h' \in \mathbb{R}$ yang mendekati nol. Dari pengamatan geometris sifat-sifat sinar, diperoleh

$$h/s = -h'/s' \quad \text{dan} \quad h/f = -h'/(s'-f). \tag{6.53}$$

Dengan mengeliminasi h dan h' dari kedua persamaan (6.53), diperoleh

$$\begin{aligned} f/s = (s'-f)/s' \quad &\Leftrightarrow \quad fs' = s(s'-f) \quad \Leftrightarrow \quad fs' + sf = ss' \\ &\Leftrightarrow \quad 1/f = 1/s + 1/s'. \end{aligned} \tag{6.54}$$

Dari persamaan (6.54), diperoleh $s' = sf/(s-f)$, sehingga dari persamaan (6.53), diperoleh perbesaran bayangannya, yaitu

$$M := h'/h = f/(f-s) = -s'/s. \tag{6.55}$$

Bayangan dikatakan nyata apabila $s' > 0$. Bayangan dikatakan maya apabila $s' < 0$. Bayangan dikatakan tegak apabila $h' > 0$. Bayangan dikatakan terbalik apabila $h' < 0$. Bayangan dikatakan diperbesar apabila $|M| > 1$. Bayangan dikatakan sama besar apabila $|M| = 1$. Bayangan dikatakan diperkecil apabila $|M| < 1$. Pada lensa cembung, dapat dikatakan $f > 0$. Pada lensa cekung, dapat dikatakan $f < 0$.

6.8 Kalkulus Variasi dan Prinsip Fermat

Andaikan ada sinar monokromatis yang merambat di posisi $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ pada waktu $t \in \mathbb{R}$ di dalam medium $\mathbb{R}^3$ yang berindeks bias mutlak $n \in \mathbb{R}$ dengan $n \mapsto (\vec{r}, t)$. Kecepatan sinar tersebut pada waktu t tentu saja $\vec{v} := \dot{\vec{r}} := d\vec{r}/dt$, sehingga kelajuannya adalah $v := |\vec{r}|$. Menurut hukum Snellius, berlaku kaitan $v = c/n$, di mana c adalah kelajuan sinar dalam ruang hampa, sehingga

$$dt = c^{-1} n |d\vec{r}| = c^{-1} n v \, dt \tag{6.56}$$

dengan keharusan $nv/c = 1$. Oleh karena itu, dengan mengintegralkan persamaan (6.56) dengan batas bawah $t = t_1$ dan batas atas $t = t_2$ untuk sebarang $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, maka diperoleh

$$\Delta t := t_2 - t_1 = \frac{1}{c} \int_{t_1}^{t_2} nv \, dt = \int_{t_1}^{t_2} L \, dt \tag{6.57}$$

di mana $L := nv/c$ (yang bergantung secara eksplisit pada $\vec{r}$, $\dot{\vec{r}}$, dan t) adalah *Lagrangian* dari sistem optik tersebut.

Dengan menggunakan kalkulus variasi, agar Δt bernilai stasioner, yaitu $\delta \Delta t = 0$, diperoleh persamaan Euler-Lagrange, yaitu

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \tag{6.58}$$

alias

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (n|\dot{\vec{r}}|)}{\partial \dot{\vec{r}}} = \frac{\partial (n|\dot{\vec{r}}|)}{\partial \vec{r}} \tag{6.59}$$

alias

$$\frac{d}{dt}\left(n\frac{d|\dot{\vec{r}}|}{d\dot{\vec{r}}}\right) = \frac{\partial n}{\partial \vec{r}}|\dot{\vec{r}}|. \tag{6.60}$$

Karena $d|\dot{\vec{r}}|/d\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}/|\dot{\vec{r}}|$, maka persamaan (6.60) menjadi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{n\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|}\right) = \frac{\partial n}{\partial \vec{r}}|\dot{\vec{r}}| \quad \text{dengan} \quad \frac{n|\dot{\vec{r}}|}{c} = 1 \tag{6.61}$$

yang merupakan persamaan gerak sinar tersebut di ruang $\mathbb{R}^3$.

Apabila n bersifat homogen (konstan), maka dari persamaan (6.61), diperoleh $d(\dot{\vec{r}}/|\dot{\vec{r}}|) = \vec{0}$ alias $\dot{\vec{r}}/|\dot{\vec{r}}| = (\dot{\vec{r}})_0/|(\dot{\vec{r}})_0|$, sehingga $\dot{\vec{r}} = |\dot{\vec{r}}|(\dot{\vec{r}})_0/|(\dot{\vec{r}})_0| = (c/n)(\dot{\vec{r}})_0/|(\dot{\vec{r}})_0|$ alias (diintegralkan terhadap t) $\vec{r} = \vec{r}_0 + (ct/n)(\dot{\vec{r}})_0/|(\dot{\vec{r}})_0|$, yaitu bahwa sinar tersebut bergerak lurus beraturan dengan kelajuan c/n dan arah sebarang, seperti yang diharapkan menurut intuisi fisis yang seharusnya.

6.9 Proyeksi Stereografis Permukaan Bola ke Bidang Datar

Andaikan ada sebuah permukaan bola

$$S^2(R) := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid |\vec{r}| = R\} \tag{6.62}$$

dan ada sebuah bidang datar

$$P(c) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = c\} \tag{6.63}$$

di mana $R \in \mathbb{R}^+$ dan $c \in \mathbb{R}$.

Oleh karena itu, salah satu titik pada $S^2(R)$ adalah

$$\vec{r} := R(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \tag{6.64}$$

di mana $\theta \in [0, \pi]$ dan $\phi \in (0, 2\pi) \cup \{0\}$.

Proyeksi stereografis dari $S^2(R)$ ke $P(c)$ oleh titik $\vec{r}_0 := (0, 0, -R)$ merupakan titik potong pada $P(c)$ oleh garis yang menghubungkan $\vec{r}_0$ dan $\vec{r}$ dengan titik potong di (X, Y, c) di mana $X, Y \in \mathbb{R}$. Garis tersebut adalah

$$L(\vec{r}_0, \vec{r}) := \{\vec{s} \in \mathbb{R}^3 \mid (\vec{s} - \vec{r}_0) \times (\vec{r} - \vec{r}_0) = \vec{0}\}. \tag{6.65}$$

Oleh karena itu,

$$\vec{s} := (x, y, z) = \vec{r}_0 + k(\vec{r} - \vec{r}_0) \tag{6.66}$$

di mana $k \in \mathbb{R}$, sehingga

$$(X, Y, c) = (0, 0, -R) + k(R(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) - (0, 0, -R)). \tag{6.67}$$

Untuk mencari k, di ambillah komponen

$$c = -R + kR(\cos\theta + 1) \tag{6.68}$$

alias

$$c/R = -1 + 2k\cos^2(\theta/2) \tag{6.69}$$

alias

$$k = (1/2)(1 + c/R)\sec^2(\theta/2). \tag{6.70}$$

Kedua komponen lainnya adalah

$$X = kR\sin\theta\cos\phi = (R + c)\tan(\theta/2)\cos\phi \tag{6.71}$$

dan

$$Y = kR\sin\theta\sin\phi = (R + c)\tan(\theta/2)\sin\phi. \tag{6.72}$$

Dengan demikian pemetaan $(\theta, \phi) \mapsto (X, Y)$ merupakan proyeksi stereografis.

6.10 Bayangan Titik akibat Pencerminan oleh Cermin Berbentuk Permukaan Bola

Andaikan di ruang $\mathbb{R}^3$, ada sebuah cermin berbentuk permukaan bola, yaitu

$$S^2(\vec{r}_0, R) := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid |\vec{r} - \vec{r}_0| = R\} \tag{6.73}$$

di mana $\vec{r}_0 \in \mathbb{R}^3$ adalah pusat dari $S^2(\vec{r}_0, R)$, serta $R \in \mathbb{R}^+$ adalah jari-jari dari $S^2(\vec{r}_0, R)$.

Selanjutnya, titik $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ akan dicerminkan oleh $S^2(\vec{r}_0, R)$, sehingga menghasilkan dua buah bayangan, yaitu $\vec{r}_1', \vec{r}_2' \in \mathbb{R}^3$.

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_0 + (R + s_1')\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}. \tag{6.74}$$

$$s_1' := \frac{s_1 f_1}{s_1 - f_1}, \qquad s_1 := |\vec{r} - \vec{r}_0| - R, \qquad f_1 := -\frac{1}{2}R. \tag{6.75}$$

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_0 + \left(R + \frac{s_1 f_1}{s_1 - f_1}\right)\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}. \tag{6.76}$$

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_0 + \left(R + \frac{(|\vec{r} - \vec{r}_0| - R)(-R/2)}{|\vec{r} - \vec{r}_0| - R/2}\right)\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}. \tag{6.77}$$

$$\vec{r}_2' = \vec{r}_0 + (R - s_2')\frac{\vec{r}_0 - \vec{r}}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|}. \tag{6.78}$$

$$\vec{r}_2' = \vec{r}_0 + (s_2' - R)\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}. \tag{6.79}$$

$$s_2' := \frac{s_2 f_2}{s_2 - f_2}, \qquad s_2 := |\vec{r} - \vec{r}_0| + R, \qquad f_2 := \frac{1}{2}R. \tag{6.80}$$

$$\vec{r}_2' = \vec{r}_0 + \left(\frac{s_2 f_2}{s_2 - f_2} - R \right) \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}. \tag{6.81}$$

$$\vec{r}_2' = \vec{r}_0 + \left(\frac{(|\vec{r} - \vec{r}_0| + R)R/2}{|\vec{r} - \vec{r}_0| + R/2} - R \right) \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}. \tag{6.82}$$

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_0 + \frac{R(|\vec{r} - \vec{r}_0| - R/2) + (|\vec{r} - \vec{r}_0| - R)(-R/2)}{|\vec{r} - \vec{r}_0| - R/2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}. \tag{6.83}$$

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_0 + \frac{R|\vec{r} - \vec{r}_0|/2}{|\vec{r} - \vec{r}_0| - R/2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}. \tag{6.84}$$

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_0 + R\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{2|\vec{r} - \vec{r}_0| - R}. \tag{6.85}$$

$$\vec{r}_2' = \vec{r}_0 + \frac{(|\vec{r} - \vec{r}_0| + R)R/2 - R(|\vec{r} - \vec{r}_0| + R/2)}{|\vec{r} - \vec{r}_0| + R/2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}. \tag{6.86}$$

$$\vec{r}_2' = \vec{r}_0 + \frac{(-R/2)|\vec{r} - \vec{r}_0|}{|\vec{r} - \vec{r}_0| + R/2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}. \tag{6.87}$$

$$\vec{r}_2' = \vec{r}_0 - R\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{2|\vec{r} - \vec{r}_0| + R}. \tag{6.88}$$

Jadi, bayangan dari titik $\vec{r}$ akibat pencerminan oleh cermin berbentuk permukaan bola $S^2(\vec{r}_0, R)$ adalah

$$\vec{r}' = \vec{r}_\pm' = \vec{r}_0 \pm R\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{2|\vec{r} - \vec{r}_0| \mp R}. \tag{6.89}$$

Bayangannya ada dua, yaitu $\vec{r}_+'$ dan $\vec{r}_-'$.

6.11 Menghitung Tetapan Kelajuan Cahaya dalam Ruang Hampa

Tetapan kelajuan cahaya dalam ruang hampa, yaitu c, dapat dihitung tanpa eksperimen, dengan aksioma yang mengatakan bahwa jarak tempuh cahaya dalam ruang hampa dalam satu hari sama dengan panjang lintasan yang ditempuh bulan selama seribu tahun relatif terhadap kerangka acuan matahari, dengan menganggap bahwa kelajuan cahaya adalah c yang tetap dengan lintasan gerak sebarang di ruang $\mathbb{R}^3$.

Apabila posisi bumi menurut matahari adalah $\vec{R} := R(\hat{x}\cos\Omega t + \hat{y}\sin\Omega t)$, dan posisi bulan menurut bumi adalah $\vec{r}' := r(\hat{x}\cos\omega t + \hat{y}\sin\omega t)$ di mana $\hat{x} := (1, 0, 0)$, $\hat{y} := (0, 1, 0)$, $\Omega := 2\pi/(1\,\text{tahun masehi})$ adalah frekuensi sudut putaran bumi relatif terhadap matahari, $\omega := 2\pi/(1\,\text{bulan siderik})$ adalah frekuensi sudut putaran bulan relatif terhadap bumi, dan t adalah waktu, serta R adalah jarak bumi ke matahari, dan r adalah jarak bulan ke bumi, maka posisi bulan relatif terhadap matahari adalah

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' = \hat{x}(R\cos\Omega t + r\cos\omega t) + \hat{y}(R\sin\Omega t + r\sin\omega t). \tag{6.90}$$

Oleh karena itu, panjang lintasan yang ditempuh bulan selama 1000 tahun menurut matahari adalah

$$l := \int_{t=0}^{t=T} |d\vec{r}| = \int_0^T \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt = c\tau \tag{6.91}$$

di mana $T := 1000\,\text{tahun siderik}$, $\tau := 1\,\text{harisiderik}$.

Kecepatan sesaat bulan menurut matahari pada waktu t adalah

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -\hat{x}(\Omega R\sin\Omega t + \omega r\sin\omega t) + \hat{y}(\Omega R\cos\Omega t + \omega r\cos\omega t) \tag{6.92}$$

sehingga

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^2 = (\Omega R\sin\Omega t + \omega r\sin\omega t)^2 + (\Omega R\cos\Omega t + \omega r\cos\omega t)^2 \tag{6.93}$$

$$= ((\Omega R)^2 + (\omega r)^2) + 2\Omega R\omega r\cos((\Omega - \omega)t). \tag{6.94}$$

Karena $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2(\alpha/2)$ untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$, maka

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^2 = ((\Omega R)^2 + (\omega r)^2) + 2\Omega R\omega r\left(1 - 2\sin^2\left(\frac{\Omega - \omega}{2}t\right)\right) \tag{6.95}$$

$$= (\Omega R + \omega r)^2 - 4\Omega R\omega r\sin^2\left(\frac{\Omega - \omega}{2}t\right) = (\Omega R + \omega r)^2(1 - k^2\sin^2\phi) \tag{6.96}$$

di mana

$$k := \frac{2\sqrt{\Omega R\omega r}}{\Omega R + \omega r} \quad \text{dan} \quad \phi := \frac{|\Omega - \omega|}{2}t \tag{6.97}$$

sehingga

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = |\Omega R + \omega r|\sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}. \tag{6.98}$$

Oleh karena itu,

$$l = |\Omega R + \omega r|\int_0^T \sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}\,dt = 2\frac{|\Omega R + \omega r|}{|\Omega - \omega|}\int_0^{\frac{|\Omega-\omega|}{2}T} \sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}\,d\phi. \tag{6.99}$$

Dengan mendefinisikan bentuk Legendre dari integral eliptik jenis kedua, yaitu

$$E(k, \Phi) := \int_0^\Phi \sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}\,d\phi, \tag{6.100}$$

maka

$$l = 2\frac{|\Omega R + \omega r|}{|\Omega - \omega|}E\left(\frac{2\sqrt{\Omega R\omega r}}{\Omega R + \omega r}, \frac{|\Omega - \omega|}{2}T\right) = c\tau \tag{6.101}$$

alias

$$c = \frac{2}{\tau}\frac{|\Omega R + \omega r|}{|\Omega - \omega|} E\left(\frac{2\sqrt{\Omega R \omega r}}{\Omega R + \omega r}, \frac{|\Omega - \omega|}{2} T\right). \tag{6.102}$$

Berikut ini adalah program MATLAB untuk menghitung c.

```
clear all;
format long;
tau = 86164.0906; % detik
T = 12000*27.32661*tau; % detik
satu_tahun = 365.25636*tau; % detik
Omega = 2*pi/satu_tahun; % radian per detik
satu_bulan = 27.32661*tau; % detik
omega = -2*pi/satu_bulan; % radian per detik
R = 149600000000; % meter
r = 384400000; % meter
k = 2*sqrt(Omega*R*omega*r)/(Omega*R + omega*r);
Phi = abs(Omega - omega)*T/2;
N = 20000;
dphi = Phi/N;
phi(1) = dphi;
for m = 2:N
   phi(m) = phi(m - 1) + dphi;
end
E = 0;
for n = 1:N;
   E = E + sqrt(1 - k^2*sin(phi(n))^2)*dphi;
end
C = (2/tau)*(Omega*R + omega*r)/abs(Omega - omega);
c = C*E;
```

6.12 Lintasan Bayangan Titik akibat Pencerminan oleh Garis Lurus yang Berputar

Sebuah titik $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ yang dicerminkan secara aktif oleh sebuah garis lurus $L(\alpha) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x \tan \alpha\}$, di mana $\alpha \in \mathbb{R}$ akan mengalami transformasi ke titik $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ sedemikian

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{6.103}$$

sehingga

$$x' = x \cos 2\alpha + y \sin 2\alpha, \tag{6.104}$$

$$y' = -y \cos 2\alpha + x \sin 2\alpha. \tag{6.105}$$

Apabila garis $L(\alpha)$ tersebut diputar dengan sumbu putar melalui titik $(0, 0)$ dan tegak lurus bidang $\mathbb{R}^2$, maka bayangan titik (x', y') tersebut juga akan bergerak.

Untuk mengetahui bentuk lintasan geraknya, kita dapat mengeliminasi α dari kedua persamaan terakhir tersebut. Ternyata, kita peroleh

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2 \tag{6.106}$$

yang dinyatakan oleh notasi pembentuk himpunan menjadi

$$P(x, y) := \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 \mid x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2\}. \tag{6.107}$$

Ternyata, $P(x, y)$ berbentuk lingkaran dengan jari-jari $R := \sqrt{x^2 + y^2}$ dan pusat $(0, 0)$.

6.13 Teknik Menggambar Perspektif secara Matematis

Andaikan di ruang $\mathbb{R}^3$ ada sebuah titik $\vec{r} := (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Andaikan pula ada sebuah bidang gambar, yaitu

$$P(X) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = X\} \tag{6.108}$$

di mana $X \in \mathbb{R}$, serta sebuah titik tinjau, yaitu $\vec{r}_0 := (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$.

Seandainya ada sinar dari $\vec{r}$ menuju $\vec{r}_0$, maka sinar tersebut akan memotong $P(X)$ di titik $\vec{R} := (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$. Kita akan mencari titik potongnya.

Mula-mula,

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \times (\vec{R} - \vec{r}_0) = \vec{0}. \tag{6.109}$$

alias

$$\frac{X - x_0}{x - x_0} = \frac{Y - y_0}{y - y_0} = \frac{Z - z_0}{z - z_0} \tag{6.110}$$

alias

$$Y = y_0 + (X - x_0)\frac{y - y_0}{x - x_0} \quad \text{dan} \quad Z = z_0 + (X - x_0)\frac{z - z_0}{x - x_0}. \tag{6.111}$$

Pemetaan $(x, y, z) \mapsto (Y, Z)$ merupakan penggambaran perspektif pada bidang gambar.

Contohnya adalah sebagai berikut.

Andaikan ada sebuah lingkaran

$$S^1(R) := \{R(\cos\phi, \sin\phi, 0) \mid \phi \in \{0\} \cup (0, 2\pi)\} \tag{6.112}$$

di mana $R \in \mathbb{R}^+$ adalah jari-jarinya.

Andaikan kita ambil sebuah titik tinjau, yaitu $(x_0, 0, z_0)$, maka kita peroleh $x = R\cos\phi$, $y = R\sin\phi$, $z = 0$, dan $y_0 = 0$, sehingga

$$Y = (X - x_0)\frac{R\sin\phi}{R\cos\phi - x_0} \tag{6.113}$$

dan

$$Z = z_0 - (X - x_0)\frac{z_0}{R\cos\phi - x_0}. \tag{6.114}$$

Dari sini, ϕ akan dieliminasi untuk memperoleh bayangannya pada bidang $P(X)$.

6.14 Menentukan Kurva Pelukis dalam Teknik Menggambar Perspektif

Andaikan di ruang $\mathbb{R}^3$ ada sebuah permukaan

$$S(\varphi) := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(\vec{r}) = 0\} \tag{6.115}$$

di mana $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ adalah sebarang pemetaan. Andaikan pula, $\vec{r} := (x, y, z) \in S(\varphi)$. Dalam teknik menggambar perspektif secara matematis, tentu ada sebuah bidang gambar, misalnya

$$P(X) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = X\} \tag{6.116}$$

di mana $X \in \mathbb{R}$, serta sebuah titik tinjau, yaitu $\vec{r}_0 := (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$.

Kurva pelukis dari $S(\varphi)$ didefinisikan secara intuitif sebagai

$$R(\varphi, \vec{r}_0) := \{\vec{r} \in S(\varphi) \mid (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \nabla\varphi(\vec{r}) = 0\}. \tag{6.117}$$

Sebagai contoh, kita akan menentukan kurva pelukis dari sebuah permukaan bola, yaitu

$$S^2(R) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\} \tag{6.118}$$

dengan $R \in \mathbb{R}^+$ adalah jari-jari $S^2(R)$. Karena $S^2(R)$ dianggap sebagai $S(\varphi)$, maka kita peroleh

$$\varphi(\vec{r}) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2. \tag{6.119}$$

Tentu saja,

$$\nabla\varphi(\vec{r}) = 2(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) \tag{6.120}$$

di mana $\hat{x} := (1, 0, 0)$, $\hat{y} := (0, 1, 0)$, dan $\hat{z} := (0, 0, 1)$.

Dari persamaan $(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \nabla\varphi(\vec{r}) = 0$, kita peroleh

$$x(x - x_0) + y(y - y_0) + z(z - z_0) = 0 \tag{6.121}$$

alias

$$x(x - x_0) + y(y - y_0) = z(z_0 - z). \tag{6.122}$$

Kita akan melakukan parameterisasi $R(\varphi, \vec{r}_0)$ dengan parameter $l \in \mathbb{R} \cup (i\mathbb{R})$ dan $\alpha \in \{0\} \cup (0, 2\pi)$. Oleh karena itu,

$$z(z_0 - z) = l^2, \tag{6.123}$$

$$x(x - x_0) = l^2 \cos^2\alpha, \tag{6.124}$$

$$y(y - y_0) = l^2 \sin^2\alpha. \tag{6.125}$$

Dari sini, kita peroleh

$$z^2 - z_0 z + l^2 = 0, \tag{6.126}$$

$$x^2 - x_0 x - l^2 \cos^2\alpha = 0, \tag{6.127}$$

$$y^2 - y_0 y - l^2 \sin^2\alpha = 0, \tag{6.128}$$

sehingga dari rumus abc, kita peroleh

$$z = \frac{1}{2}\left(z_0 \pm \sqrt{z_0^2 - 4l^2}\right), \tag{6.129}$$

$$x = \frac{1}{2}\left(x_0 \pm \sqrt{x_0^2 + 4l^2\cos^2\alpha}\right), \tag{6.130}$$

$$y = \frac{1}{2}\left(y_0 \pm \sqrt{y_0^2 + 4l^2\sin^2\alpha}\right). \tag{6.131}$$

Kemudian, hasil-hasil ini kita masukkan ke persamaan $x^2+y^2+z^2 = R^2$, sehingga kita peroleh kaitan antara l dan α, yaitu $l \mapsto \alpha$, lalu kita memperoleh sebuah kurva pelukis yang kita inginkan, yaitu $(x_{l,\alpha}(l_\alpha(\alpha),\alpha), y_{l,\alpha}(l_\alpha(\alpha),\alpha), z_{l,\alpha}(l_\alpha(\alpha),\alpha))$.

Bab 7

Serbaneka Matematika

7.1 Mengubah Bentuk $\sqrt{p+\sqrt{q}}$ menjadi Bentuk $\sqrt{a}+\sqrt{b}$

Misalkan $a, b, p, q \in \mathbb{C}$ adalah sebarang bilangan kompleks. Tentu saja,

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a+b+2\sqrt{ab}. \tag{7.1}$$

Agar bentuk dalam persamaan terakhir ini setara dengan $p+\sqrt{q}$, maka haruslah

$$a+b=p \quad \text{dan} \quad 4ab=q \tag{7.2}$$

sehingga $b = p-a$. Otomatis,

$$4a(p-a)=q \quad \text{lalu} \quad 0=4a^2-4pa+q \tag{7.3}$$

sehingga (dengan menggunakan rumus abc) diperoleh

$$a=\frac{p\pm\sqrt{p^2-q}}{2}. \tag{7.4}$$

Karena $b=p-a$, maka

$$b=\frac{p\mp\sqrt{p^2-q}}{2}. \tag{7.5}$$

Oleh karena itu,

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{p+\sqrt{q}} \tag{7.6}$$

alias

$$\sqrt{p+\sqrt{q}}=\sqrt{\frac{p+\sqrt{p^2-q}}{2}}+\sqrt{\frac{p-\sqrt{p^2-q}}{2}}. \tag{7.7}$$

Inilah bentuk yang diharapkan.

7.2 Limit Rumus abc

Andaikan ada sebuah persamaan kuadrat, yaitu

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{7.8}$$

di mana $a, b, c \in \mathbb{R}$, sedangkan $x \in \mathbb{R}$ adalah peubah riil yang tidak diketahui dan akan dicari.

Apabila $a = 0$, maka persamaan kuadrat tersebut menjadi persamaan linier, yaitu $bx + c = 0$ yang penyelesaiannya adalah $x = -c/b$ asalkan $b \neq 0$.

Penyelesaian persamaan kuadrat tersebut dapat diperoleh dengan mudah menggunakan rumus abc, yaitu

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{7.9}$$

asalkan $a \neq 0$.

Sekarang, kita akan mengambil limit $a \to 0$ pada rumus abc tersebut. Andaikan rumus abc tersebut adalah $x = f(a)$ di mana $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi tertentu dengan

$$f(a) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{7.10}$$

Kita akan menghitung

$$L := \lim_{a \to 0} f(a). \tag{7.11}$$

Untuk menerapkan teorema L' Hopital, maka $f(0)$ haruslah sama dengan 0/0, sehingga dalam hal ini haruslah $\pm|b|$ harus sama dengan b. Oleh karena itu,

$$L = \lim_{a \to 0} f(a) = \frac{1}{2}\left(\pm\frac{1}{2}\lim_{a \to 0}\frac{-4c}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\right). \tag{7.12}$$

$$L = -(\pm c/|b|) = -c/b \tag{7.13}$$

sesuai yang diharapkan.

7.3 Definisi dan Teorema Limit

Andaikan $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dan $c, \delta, \epsilon \in \mathbb{R}$. Definisi limit adalah

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \tag{7.14}$$

sedemikian rupa sehingga untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$, sedemikian berlaku jika

$$0 < |x - c| < \delta \tag{7.15}$$

mengakibatkan

$$|f(x) - L| < \epsilon. \tag{7.16}$$

Dari definisi ini, kita hendak mencari bentuk eksplisit dari nilai L.

Kita dapat menuliskan
$$|x-c| = |r| \tag{7.17}$$
di mana $0 < |r| < \delta$ alias $r \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$, sehingga
$$x = c + r. \tag{7.18}$$
Kita dapat menuliskan pula
$$|f(x) - L| = |R| \tag{7.19}$$
di mana $0 \leq |R| < \epsilon$ alias $R \in (-\epsilon, \epsilon)$, sehingga
$$L = f(x) + R = f(c+r) + R. \tag{7.20}$$
Contoh kongkretnya adalah
$$\lim_{x \to 0} x = (0 + r) + R. \tag{7.21}$$
Kita ambil $R = -r$, sehingga
$$\lim_{x \to 0} x = r + (-r) = 0. \tag{7.22}$$
Selain itu,
$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = \frac{0+r}{0+r} + R. \tag{7.23}$$
Kita ambil $R = 0$, sehingga
$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = \frac{r}{r} = 1. \tag{7.24}$$
Selanjutnya kita hendak menurunkan beberapa teorema limit.
$$\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = (f(c+r) + g(c+r)) + R. \tag{7.25}$$
Apabila kita ambil $R = R_1 + R_2$, di mana $R_1, R_2 \in (-\epsilon, \epsilon)$, maka
$$\begin{aligned} \lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) &= (f(c+r) + g(c+r)) + R \\ &= (f(c+r) + R_1) + (g(c+r) + R_2) \\ &= \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x). \end{aligned} \tag{7.26}$$

$$\lim_{x \to c} (f(x) g(x)) = f(c+r) g(c+r) + R. \tag{7.27}$$
Apabila kita ambil $R = 0$, maka
$$\lim_{x \to c} (f(x) g(x)) = (f(c+r) + R)(g(c+r) + R) = \left(\lim_{x \to c} f(x) \right) \left(\lim_{x \to c} g(x) \right). \tag{7.28}$$

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c+r)}{g(c+r)} + R. \tag{7.29}$$
Apabila kita ambil $R = 0$, maka
$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c+r) + R}{g(c+r) + R} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)} \tag{7.30}$$

di mana $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$.

Sekarang, andaikan kita hendak menghitung nilai

$$L := \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x}{y}. \tag{7.31}$$

Dari definisi limit tersebut, kita peroleh

$$L = \frac{r}{s} + R + S \tag{7.32}$$

di mana $r, s \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$ dan $R, S \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Apabila kita ambil $r = \alpha s$, di mana $\alpha \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$, maka kita peroleh

$$L = \alpha + R + S. \tag{7.33}$$

Apabila kita ambil $R = 0$ dan $S = -\alpha$, maka kita peroleh $L = 0$. Jadi,

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x}{y} = 0. \tag{7.34}$$

7.4 Teorema L' Hôpital

Andaikan $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah dua buah fungsi riil, serta f' dan g' berturut-turut adalah turunan pertama dari f dan g. Apabila $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ dan $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, maka

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to a}\frac{1/g(x)}{1/f(x)} \\
&= \lim_{x\to a}\frac{-g'(x)/(g(x))^2}{-f'(x)/(f(x))^2} \\
&= \left(\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}\right)\left(\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2
\end{aligned} \tag{7.35}$$

sehingga

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.} \tag{7.36}$$

Jadi, teorema L' Hôpital bukan hanya berlaku untuk bentuk 0/0, melainkan juga berlaku untuk bentuk ∞/∞.

7.5 Daerah Konvergensi Deret Taylor

Misalkan ada sebuah fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Deret Taylor dari $f(x)$ di sekitar titik $h \in \mathbb{R}$ adalah

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}f^{(j)}(h)(x-h)^j \tag{7.37}$$

di mana didefinisikan

$$f^{(j)}(h) := \lim_{x \to h} \frac{d^j f(x)}{dx^j}. \tag{7.38}$$

Menurut tes rasio, deret $\sum_{j=0}^{\infty} u_j$ (di mana $u_j \in \mathbb{R}$ untuk setiap $j \in \mathbb{N}_0$) bersifat konvergen apabila

$$\lim_{j \to \infty} \left| \frac{u_{j+1}}{u_j} \right| < 1. \tag{7.39}$$

sehingga deret Taylor dari $f(x)$ tersebut bersifat konvergen apabila

$$\lim_{j \to \infty} \left| \frac{1}{j+1} \frac{f^{(j+1)}(h)}{f^{(j)}(h)} (x-h) \right| < 1 \tag{7.40}$$

alias

$$|x-h| < \lim_{j \to \infty} \left| (j+1) \frac{f^{(j)}(h)}{f^{(j+1)}(h)} \right| \tag{7.41}$$

alias

$$-\lim_{j \to \infty} \left| (j+1) \frac{f^{(j)}(h)}{f^{(j+1)}(h)} \right| < x-h < \lim_{j \to \infty} \left| (j+1) \frac{f^{(j)}(h)}{f^{(j+1)}(h)} \right| \tag{7.42}$$

alias

$$h - \lim_{j \to \infty} \left| (j+1) \frac{f^{(j)}(h)}{f^{(j+1)}(h)} \right| < x < h + \lim_{j \to \infty} \left| (j+1) \frac{f^{(j)}(h)}{f^{(j+1)}(h)} \right|. \tag{7.43}$$

Inilah daerah konvergensi deret Taylor dari $f(x)$.

7.6 Deret Ganda

Secara umum, sebuah deret ganda memiliki bentuk

$$S := \sum_{j_1, \cdots, j_n \in \mathbb{N}} u_{j_1, \cdots, j_n} \tag{7.44}$$

di mana $u_{j_1, \cdots, j_n} \in \mathbb{R}$ untuk setiap $j_1, \cdots, j_n \in \mathbb{N}$.

Deret ganda S ini dapat dianggap sebagai deret tunggal, yaitu

$$S = \sum_{j_k \in \mathbb{N}} v_{j_k} \tag{7.45}$$

untuk setiap $k \in \{1, \cdots, n\}$ di mana

$$v_{j_k} := \sum_{j_1, \cdots, j_{k-1}, j_{k+1}, \cdots, j_n \in \mathbb{N}} u_{j_1, \cdots, j_n} \tag{7.46}$$

untuk setiap $k \in \{1, \cdots, n\}$.

Melalui tes rasio, deret ganda S dapat diuji konvergenitasnya, dengan menganggap S adalah deret tunggal, yaitu bahwa

$$\lim_{j_k\to\infty}\left|\frac{v_{j_k+1}}{v_{j_k}}\right| < 1 \tag{7.47}$$

untuk setiap $k \in \{1, \cdots, n\}$.

Dengan memasukkan nilai v_{j_k}, diperoleh syarat konvergenitas deret ganda S tersebut, yaitu

$$\lim_{j_k\to\infty}\left|\frac{\sum_{j_1,\cdots,j_{k-1},j_{k+1},\cdots,j_n\in\mathbb{N}} u_{j_1,\cdots,j_{k-1},(j_k+1),j_{k+1},\cdots,j_n}}{\sum_{j_1',\cdots,j_{k-1}',j_{k+1}',\cdots,j_n'\in\mathbb{N}} u_{j_1',\cdots,j_n'}}\right| < 1 \tag{7.48}$$

untuk setiap $k \in \{1, \cdots, n\}$.

Apabila persamaan terakhir dipenuhi, maka deret ganda S bersifat konvergen.

7.7 Membalik Pemetaan

Andaikan A, B, dan C adalah sebarang tiga buah lapangan. Andaikan ada pemetaan $f, g : A \times B \to C$. Andaikan diketahui $z = f(x, y)$. Di sini kita diminta untuk mencari x dalam bentuk yang mengandung y dan z dari persamaan terakhir tersebut. Oleh karena itu, $z = f((\mathrm{id}\otimes(y1_f))(x)) = (f\circ(\mathrm{id}\otimes(y1_f)))(x)$ alias $x = (f\circ(\mathrm{id}\otimes(y1_f)))^{-1}(z)$, di mana $\mathrm{id}(x) = x$ dan $1_f(x) = 1$ untuk setiap $x \in A, B, C$, serta $(f\otimes g)(x) = (f(x), g(x))$.

Selanjutnya, andaikan diketahui $z = f(x, y)$ dan $w = g(x, y)$. Dari sini, kita diminta untuk mencari x dan y dalam bentuk yang mengandung z dan w. Mula-mula, kita akan mencari y dalam bentuk yang mengandung x dan z dari persamaan $z = f(x, y)$, yaitu bahwa $z = f(((x1_f)\otimes\mathrm{id})(y)) = (f\circ((x1_f)\otimes\mathrm{id}))(y)$ sehingga $y = (f\circ((x1_f)\otimes\mathrm{id}))^{-1}(z)$, lalu hasil ini kita masukkan ke dalam persamaan $w = g(x, y)$, yaitu bahwa $w = g(x, (f\circ((x1_f)\otimes\mathrm{id}))^{-1}(z)) = g((\mathrm{id}\otimes(f\circ((\mathrm{id}\,1_f)\otimes\mathrm{id}))^{-1}(z))(x)) = (g\circ(\mathrm{id}\otimes(f\circ((\mathrm{id}\,1_f)\otimes\mathrm{id}))^{-1}(z)))(x)$ sehingga $x = (g\circ(\mathrm{id}\otimes(f\circ((\mathrm{id}\,1_f)\otimes\mathrm{id}))^{-1}(z)))^{-1}(w)$. Kemudian, untuk mencari y, kita masukkan hasil terakhir ini ke persamaan $y = (f\circ((x1_f)\otimes\mathrm{id}))^{-1}(z)$, sehingga $y = (f\circ(((g\circ(\mathrm{id}\otimes(f\circ((\mathrm{id}\,1_f)\otimes\mathrm{id}))^{-1}(z)))^{-1}(w)1_f)\otimes\mathrm{id}))^{-1}(z)$. Demikianlah x dan y sudah dapat dinyatakan dalam z dan w.

7.8 Perkalian Titik Dua Buah Vektor

Perkalian titik antara vektor $\vec{A}$ dan vektor $\vec{B}$ didefinisikan sebagai

$$\vec{A}\cdot\vec{B} := |\vec{A}||\vec{B}|\cos\angle(\vec{A},\vec{B}). \tag{7.49}$$

Karena

$$\cos\angle(\vec{A},\vec{B}) = \frac{|\vec{A}+\vec{B}|^2 - |\vec{A}|^2 - |\vec{B}|^2}{2|\vec{A}||\vec{B}|}, \tag{7.50}$$

maka apabila $\vec{A} := (A_x, A_y, A_z) \in \mathbb{R}^3$ dan $\vec{B} := (B_x, B_y, B_z) \in \mathbb{R}^3$, diperoleh

$$\begin{aligned}
\vec{A}\cdot\vec{B} &= \frac{1}{2}(|\vec{A}+\vec{B}|^2 - |\vec{A}|^2 - |\vec{B}|^2) \\
&= \frac{1}{2}\left((A_x+B_x)^2 + (A_y+B_y)^2 + (A_z+B_z)^2 - (A_x^2+A_y^2+A_z^2) - (B_x^2+B_y^2+B_z^2)\right) \\
&= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z. \qquad (7.51)
\end{aligned}$$

7.9 Perkalian Silang Dua Buah Vektor

Perkalian silang antara vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ didefinisikan sebagai

$$\vec{A}\times\vec{B} := |\vec{A}||\vec{B}|\sin\angle(\vec{A},\vec{B})\frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|}. \qquad (7.52)$$

Karena untuk $\vec{A} := (A_x, A_y, A_z) \in \mathbb{R}^3$ dan $\vec{B} := (B_x, B_y, B_z) \in \mathbb{R}^3$, diperoleh

$$\begin{aligned}
\sin\angle(\vec{A},\vec{B}) &= \sqrt{1-\cos^2\angle(\vec{A},\vec{B})} = \sqrt{1-\left(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}\right)^2} = \frac{\sqrt{|\vec{A}|^2|\vec{B}|^2 - (\vec{A}\cdot\vec{B})^2}}{|\vec{A}||\vec{B}|} \\
&= \frac{\sqrt{(A_x^2+A_y^2+A_z^2)(B_x^2+B_y^2+B_z^2) - (A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)^2}}{|\vec{A}||\vec{B}|} \\
&= \frac{\sqrt{(A_yB_z-A_zB_y)^2+(A_zB_x-A_xB_z)^2+(A_xB_y-A_yB_x)^2}}{|\vec{A}||\vec{B}|}, \qquad (7.53)
\end{aligned}$$

maka

$$\vec{A}\times\vec{B} = \sqrt{(A_yB_z-A_zB_y)^2+(A_zB_x-A_xB_z)^2+(A_xB_y-A_yB_x)^2}\,\frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|}, \qquad (7.54)$$

sehingga

$$|\vec{A}\times\vec{B}| = \sqrt{(A_yB_z-A_zB_y)^2+(A_zB_x-A_xB_z)^2+(A_xB_y-A_yB_x)^2}. \qquad (7.55)$$

Ada banyak kemungkinan bentuk eksplisit dari $\vec{A}\times\vec{B}$ yang memenuhi persamaan (7.55). Karena $\hat{x}\times\hat{y}=\hat{z}$, $\hat{z}\times\hat{x}=\hat{y}$, dan $\hat{y}\times\hat{z}=\hat{x}$ harus dipenuhi, maka terpaksa

$$\vec{A}\times\vec{B} = (A_yB_z-A_zB_y)\hat{x} + (A_zB_x-A_xB_z)\hat{y} + (A_xB_y-A_yB_x)\hat{z}. \qquad (7.56)$$

7.10 Limit Vektor

Seandainya, $\vec{f}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ adalah sebuah pemetaan, $\vec{c}\in\mathbb{R}^m$ adalah sebuah vektor yang konstan, serta $\delta,\epsilon\in\mathbb{R}$. Di sini, $m,n\in\mathbb{N}$. Definisi limit vektor adalah

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{c}}\vec{f}(\vec{x}) = \vec{L} \qquad (7.57)$$

sedemikian untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian

$$0 < |\vec{x} - \vec{c}| < \delta \tag{7.58}$$

mengakibatkan

$$|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{L}| < \epsilon. \tag{7.59}$$

Dari definisi ini, kita hendak mencari bentuk eksplisit dari $\vec{L}$.

Kita dapat menuliskan

$$|\vec{x} - \vec{c}| = |\vec{r}| \tag{7.60}$$

di mana $0 < |\vec{r}| < \delta$ alias $\vec{r}$ adalah sebarang posisi pada cakram terbuka yang berpusat di titik $\vec{0} \in \mathbb{R}^m$ dan berjari-jari δ, di mana titik $\vec{0}$ dihilangkan, sehingga

$$\vec{x} = \vec{c} + \vec{r}. \tag{7.61}$$

Kita dapat juga menuliskan

$$|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{L}| = |\vec{R}| \tag{7.62}$$

di mana $0 \le |\vec{R}| < \epsilon$ alias $\vec{R}$ adalah sebarang posisi pada cakram terbuka yang berpusat di titik $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ dan berjari-jari ϵ, sehingga

$$\vec{L} = \vec{f}(\vec{x}) + \vec{R} \tag{7.63}$$

alias

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{c}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{c} + \vec{r}) + \vec{R}. \tag{7.64}$$

Inilah definisi dari limit vektor tersebut.

7.11 Magnitudo dari Jumlah Tiga Buah Vektor Satuan yang Bersudut Apit Sama Satu Sama Lain

Ada tiga buah vektor satuan, yaitu $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \in \mathbb{R}^3$ yang besar sudut apit antara setiap dua buah vektor dari ketiga buah vektor tersebut adalah sama, yaitu $\gamma := \pi - \arccos(1/3)$. Tentu saja,

$$|\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}|^2 = |\hat{A}|^2 + |\hat{B}|^2 + |\hat{C}|^2 + 2\hat{A} \cdot \hat{B} + 2\hat{B} \cdot \hat{C} + 2\hat{C} \cdot \hat{A}. \tag{7.65}$$

Karena $|\hat{A}| = |\hat{B}| = |\hat{C}| = 1$ serta $\hat{P} \cdot \hat{Q} = \cos\gamma$ untuk setiap $\hat{P}, \hat{Q} \in \{\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}\}$ di mana $\hat{P} \neq \hat{Q}$, maka

$$\begin{aligned} |\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}|^2 &= 1 + 1 + 1 + 2\cos\gamma + 2\cos\gamma + 2\cos\gamma \\ &= 3 + 6\cos\gamma = 3 + 6(-1/3) = 3 - 2 = 1. \end{aligned} \tag{7.66}$$

Dengan demikian, terdapat tiga buah vektor satuan yang magnitudo jumlah ketiganya adalah 1.

7.12 Vektor Satuan Pembagi Arah Dua Buah Vektor

Misalkan ada dua buah vektor $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Kita diminta untuk mencari sebuah vektor satuan $\hat{c}(\vec{a}, \vec{b}) \in \mathbb{R}^3$ yang membagi adil arah kedua vektor tersebut. Andaikan sudut yang dibentuk oleh kedua vektor tersebut adalah $\theta \in [0, \pi]$. Oleh karena itu,

$$\hat{c}(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \cos\frac{\theta}{2} + \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}}{|(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}|} \sin\frac{\theta}{2} \tag{7.67}$$

di mana

$$\cos\theta := \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \tag{7.68}$$

sehingga

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos\theta)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)} \tag{7.69}$$

serta

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos\theta)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)}. \tag{7.70}$$

Oleh karena itu,

$$\hat{c}(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)} + \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}}{|(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}|}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)}. \tag{7.71}$$

Tentu saja, secara intuitif, $\hat{c}(\vec{a}, \vec{a}) = \vec{a}/|\vec{a}|$ dan $\hat{c}(\vec{b}, \vec{a}) = \hat{c}(\vec{a}, \vec{b})$.

7.13 Garis Singgung dan Bidang yang Tegak Lurus Kurva serta Bidang Singgung dan Garis yang Tegak Lurus Permukaan

Misalkan ada sebuah kurva

$$C(f) := \{f(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \tag{7.72}$$

di mana $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ adalah pemetaan kontinyu yang injektif.

Misalkan pula, ada sebuah permukaan

$$S(g) := \{g(u, v) \mid u, v \in \mathbb{R}\} \tag{7.73}$$

di mana $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ adalah pemetaan kontinyu yang injektif.

Garis singgung di titik $f(t) \in C(f)$ adalah

$$L(f, t) := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid (\vec{r} - f(t)) \times df(t)/dt = \vec{0}\}. \tag{7.74}$$

Bidang yang tegak lurus $C(f)$ di titik $f(t) \in C(f)$ adalah

$$P(f,t) := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid (\vec{r} - f(t)) \cdot df(t)/dt = 0\}. \tag{7.75}$$

Bidang singgung di titik $g(u,v) \in S(g)$ adalah

$$P'(g,u,v) := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid (\vec{r} - g(u,v)) \cdot ((\partial g(u,v)/\partial u) \times (\partial g(u,v)/\partial v)) = 0\}. \tag{7.76}$$

Garis yang tegak lurus $S(g)$ di titik $g(u,v) \in S(g)$ adalah

$$L'(g,u,v) := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid (\vec{r} - g(u,v)) \times ((\partial g(u,v)/\partial u) \times (\partial g(u,v)/\partial v)) = \vec{0}\}. \tag{7.77}$$

7.14 Luas Segitiga di Ruang $\mathbb{R}^n$

Luas segitiga di ruang $\mathbb{R}^n$ yang ketiga titik sudutnya $\vec{a} := \sum_{i=1}^n a_i \hat{x}_i$, $\vec{b} := \sum_{i=1}^n b_i \hat{x}_i$, dan $\vec{c} := \sum_{i=1}^n c_i \hat{x}_i$ di mana $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ untuk semua $i \in \{1, \cdots, n\}$, serta

$$\hat{x}_i := (\underbrace{0, \cdots, 0, \overset{i}{1}, 0, \cdots, 0}_{n}), \tag{7.78}$$

adalah

$$\Delta := \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}|. \tag{7.79}$$

$$\Delta = \frac{1}{2}\left|\sum_{i,j=1}^n a_i b_j \hat{x}_i \times \hat{x}_j + \sum_{i,j=1}^n b_i c_j \hat{x}_i \times \hat{x}_j + \sum_{i,j=1}^n c_i a_j \hat{x}_i \times \hat{x}_j\right|. \tag{7.80}$$

$$\Delta = \frac{1}{2}\left|\sum_{i,j=1}^n (a_i b_j + b_i c_j + c_i a_j) \hat{x}_i \times \hat{x}_j\right|. \tag{7.81}$$

$$\Delta = \frac{1}{2}\left[\sum_{i,j=1}^n (a_i b_j + b_i c_j + c_i a_j)(\hat{x}_i \times \hat{x}_j) \cdot \sum_{k,l=1}^n (a_k b_l + b_k c_l + c_k a_l)(\hat{x}_k \times \hat{x}_l)\right]^{1/2}. \tag{7.82}$$

$$\Delta = \frac{1}{2}\left[\sum_{i,j,k,l=1}^n (a_i b_j + b_i c_j + c_i a_j)(a_k b_l + b_k c_l + c_k a_l)(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})\right]^{1/2}. \tag{7.83}$$

$$\Delta = \frac{1}{2}\left[\sum_{i,j=1}^n (a_i b_j + b_i c_j + c_i a_j)[(a_i b_j + b_i c_j + c_i a_j) - (a_j b_i + b_j c_i + c_j a_i)]\right]^{1/2}. \tag{7.84}$$

Apabila $n = 1$, maka $\Delta = 0$.
Apabila $n = 2$, maka

$$\Delta = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}\right\|. \tag{7.85}$$

Apabila $n = 3$, maka

$$\Delta = \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & 1 & a_3 \\ b_1 & 1 & b_3 \\ c_1 & 1 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}^2\right]^{1/2}. \tag{7.86}$$

7.15 Volume Sebuah Limas Segitiga di Ruang $\mathbb{R}^3$

Mula-mula, saya akan mencari volume sebuah limas sebarang dengan luas alas $A \in \mathbb{R}^+$ dan tinggi $T \in \mathbb{R}^+$. Volume limas tersebut adalah

$$V = \int_0^T A' dx \tag{7.87}$$

di mana $A' := Ax^2/T^2$, sehingga

$$V = \frac{A}{T^2}\int_0^T x^2 dx = \frac{A}{T^2}\frac{1}{3}T^3 = \frac{1}{3}AT. \tag{7.88}$$

Kemudian, saya akan mencari volume sebuah limas segitiga yang titik-titik sudutnya adalah $\vec{a} := (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{b} := (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{c} := (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$, dan $\vec{d} := (d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{R}^3$ di ruang $\mathbb{R}^3$. Volume tersebut adalah

$$V = \frac{1}{3}|((\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})) \cdot (\vec{d} - \vec{a})|. \tag{7.89}$$

$$V = \frac{1}{3}|(\vec{b} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{a}) \cdot (\vec{d} - \vec{a})|. \tag{7.90}$$

$$V = \frac{1}{3}|[\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}] - [\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}] + [\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}] - [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| \tag{7.91}$$

di mana $[\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}] := (\vec{p} \times \vec{q}) \cdot \vec{r}$.

Ternyata, ungkapan V yang terakhir ini dapat diringkas menjadi

$$V = \frac{1}{3}\left\|\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{matrix}\right\|. \tag{7.92}$$

Inilah volume limas segitiga tersebut.

7.16 Sebuah Kulit Bola dalam Sistem Koordinat Kulit Bola

Sebuah kulit bola memiliki tempat kedudukan

$$S^2(\vec{r}_0, R) := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid |\vec{r} - \vec{r}_0| = R\} \tag{7.93}$$

di mana $\vec{r}_0 \in \mathbb{R}^3$ adalah pusat kulit bola tersebut, dan $R \in \mathbb{R}^+$ adalah jari-jarinya.

Tentu saja,

$$\vec{r} := r(\hat{x}\sin\theta\cos\phi + \hat{y}\sin\theta\sin\phi + \hat{z}\cos\theta) \tag{7.94}$$

dan

$$\vec{r}_0 := r_0(\hat{x}\sin\theta_0\cos\phi_0 + \hat{y}\sin\theta_0\sin\phi_0 + \hat{z}\cos\theta_0) \tag{7.95}$$

di mana $r, r_0 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $\theta, \theta_0 \in [0, \pi]$, dan $\phi, \phi_0 \in \{0\} \cup (0, 2\pi)$, serta $\hat{x} := (1, 0, 0)$, $\hat{y} := (0, 1, 0)$, dan $\hat{z} := (0, 0, 1)$.

Tentu saja,

$$\begin{aligned} \vec{r} - \vec{r}_0 &= \hat{x}(r\sin\theta\cos\phi - r_0\sin\theta_0\cos\phi_0) \\ &\quad + \hat{y}(r\sin\theta\sin\phi - r_0\sin\theta_0\sin\phi_0) + \hat{z}(r\cos\theta - r_0\cos\theta_0) \end{aligned} \tag{7.96}$$

sehingga

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}_0|^2 &= r^2\sin^2\theta\cos^2\phi + r_0^2\sin^2\theta_0\cos^2\phi_0 - 2r_0 r\sin\theta_0\cos\phi_0\sin\theta\cos\phi \\ &\quad + r^2\sin^2\theta\sin^2\phi + r_0^2\sin^2\theta_0\sin^2\phi_0 - 2r_0 r\sin\theta_0\sin\phi_0\sin\theta\sin\phi \\ &\quad + r^2\cos^2\theta + r_0^2\cos^2\theta_0 - 2r_0 r\cos\theta_0\cos\theta \\ &= r^2\sin^2\theta + r_0^2\sin^2\theta_0 - 2r_0 r\sin\theta_0\sin\theta\cos(\phi - \phi_0) \\ &\quad + r^2\cos^2\theta + r_0^2\cos^2\theta_0 - 2r_0 r\cos\theta_0\cos\theta = R^2 \end{aligned} \tag{7.97}$$

sehingga

$$r^2 + r_0^2 - 2r_0 r[\cos\theta_0\cos\theta + \sin\theta_0\sin\theta\cos(\phi - \phi_0)] = R^2. \tag{7.98}$$

Inilah persamaan sebuah kulit bola dalam sistem koordinat kulit bola.

7.17 Pembuktian Teorema Pappus-Guldin

Kita akan membuktikan teorema Pappus-Guldin.

Misalkan di bidang $\mathbb{R}^2$ ada sebuah daerah $A \subset \mathbb{R}^2$ dan sebuah garis lurus $L := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}$ di mana $a, b, c \in \mathbb{R}$ sedemikian $A \cap L = \varnothing$.

Volume benda putar yang terjadi apabila daerah A diputar satu putaran penuh dengan sumbu putar garis L adalah

$$V = 2\pi \int_A \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} |dx \wedge dy|. \tag{7.99}$$

$$V = 2\pi \frac{\displaystyle\int_A \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} |dx \wedge dy|}{\displaystyle\int_A |dx \wedge dy|} \int_A |dx \wedge dy|. \tag{7.100}$$

Karena $A \cap L = \varnothing$, maka nilai $|ax + by + c|$ selalu $\pm(ax + by + c)$ untuk setiap $(x, y) \in A$, sehingga tanda integral dapat masuk ke dalam tanda nilai mutlak.

Oleh karena itu,

$$V = 2\pi \frac{\left| a\frac{\int_A x|dx \wedge dy|}{\int_A |dx \wedge dy|} + b\frac{\int_A y|dx \wedge dy|}{\int_A |dx \wedge dy|} + c\frac{\int_A |dx \wedge dy|}{\int_A |dx \wedge dy|} \right|}{\sqrt{a^2+b^2}} \int_A |dx \wedge dy|. \quad (7.101)$$

Oleh karena itu,

$$V = 2\pi \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \int_A |dx \wedge dy| \quad (7.102)$$

di mana

$$x_0 := \frac{\int_A x|dx \wedge dy|}{\int_A |dx \wedge dy|} \quad \text{dan} \quad y_0 := \frac{\int_A y|dx \wedge dy|}{\int_A |dx \wedge dy|} \quad (7.103)$$

sedemikian (x_0, y_0) adalah pusat massa dari daerah A.

Jadi, teorema Pappus-Guldin menyatakan bahwa volume benda putar yang diperoleh dengan cara memutar daerah A satu putaran penuh terhadap sumbu putar L adalah hasil kali panjang lintasan putar dari pusat massa daerah A dengan luas daerah A.

7.18 Volume Elipsoida

Ada sebuah elipsoida pejal, yaitu

$$E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 \leq 1\} \quad (7.104)$$

di mana $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ adalah setengah dari panjang sumbu-sumbu utama elipsoida tersebut.

Pertidaksamaan elipsoida tersebut dapat ditulis sebagai sebuah persamaan, yaitu

$$(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = r^2 \quad (7.105)$$

di mana $r \in [0,1]$.

Salah satu parameterisasi dari E tersebut adalah

$$x = ar \sin\alpha \cos\beta, \quad (7.106)$$

$$y = br \sin\alpha \sin\beta, \quad (7.107)$$

$$z = cr \cos\alpha. \quad (7.108)$$

Volume dari E adalah

$$V := \int_E |dx \wedge dy \wedge dz| \quad (7.109)$$

di mana

$$\begin{aligned}
\omega &:= dx \wedge dy \wedge dz = \begin{vmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial \alpha & \partial x/\partial \beta \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial \alpha & \partial y/\partial \beta \\ \partial z/\partial r & \partial z/\partial \alpha & \partial z/\partial \beta \end{vmatrix} dr \wedge d\alpha \wedge d\beta \\
&= \begin{vmatrix} a\sin\alpha\cos\beta & ar\cos\alpha\cos\beta & -ar\sin\alpha\sin\beta \\ b\sin\alpha\sin\beta & br\cos\alpha\sin\beta & br\sin\alpha\cos\beta \\ c\cos\alpha & -cr\sin\alpha & 0 \end{vmatrix} dr \wedge d\alpha \wedge d\beta \\
&= abcr^2 \begin{vmatrix} \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \end{vmatrix} dr \wedge d\alpha \wedge d\beta \\
&= abcr^2(\cos^2\alpha\sin\alpha\cos^2\beta + \sin^3\alpha\sin^2\beta + \sin^3\alpha\cos^2\beta \\
&\quad + \sin\alpha\cos^2\alpha\sin^2\beta) dr \wedge d\alpha \wedge d\beta \\
&= abcr^2(\cos^2\alpha\sin\alpha + \sin^3\alpha) dr \wedge d\alpha \wedge d\beta \\
&= abcr^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)\sin\alpha\, dr \wedge d\alpha \wedge d\beta \\
&= abcr^2 \sin\alpha\, dr \wedge d\alpha \wedge d\beta \qquad (7.110)
\end{aligned}$$

sehingga

$$V = abc\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} r^2 \sin\alpha\, dr\, d\alpha\, d\beta = \frac{4}{3}\pi abc. \qquad (7.111)$$

7.19 Pembuktian Prinsip Bagi Adil untuk Menentukan Garis Singgung suatu Kurva

Andaikan ada sebuah parabola

$$P(a,b,c) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax^2 + bx + c\} \qquad (7.112)$$

di mana $a, b, c \in \mathbb{R}$ adalah konstanta.

Tentu saja gradien garis singgung di titik $(x, y) \in P(a, b, c)$ adalah

$$m := dy/dx = 2ax + b \qquad (7.113)$$

sehingga gradien garis singgung di titik $(x_0, y_0) \in P(a, b, c)$ adalah

$$m_0 := 2ax_0 + b. \qquad (7.114)$$

Andaikan garis singgung di titik $(x_0, y_0) \in P(a, b, c)$ tersebut adalah

$$L(m_0, n_0) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = m_0 x + n_0\} \qquad (7.115)$$

di mana $m_0, n_0 \in \mathbb{R}$ sehingga

$$y = (2ax_0 + b)x + n_0. \qquad (7.116)$$

Dengan memasukkan $(x, y) = (x_0, y_0)$ ke persamaan terakhir, diperoleh

$$y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c = (2ax_0 + b)x_0 + n_0 \qquad (7.117)$$

alias
$$n_0 = ax_0^2 + bx_0 + c - (2ax_0 + b)x_0 = -ax_0^2 + c \tag{7.118}$$
sehingga
$$y = (2ax_0 + b)x + (-ax_0^2 + c) \tag{7.119}$$
alias
$$y + ax_0^2 + bx_0 + c = (2ax_0 + b)x + (bx_0 + 2c) \tag{7.120}$$
alias
$$y + y_0 = 2ax_0x + b(x + x_0) + 2c \tag{7.121}$$
alias
$$(1/2)(y + y_0) = ax_0x + (1/2)b(x + x_0) + c \tag{7.122}$$
yang merupakan prinsip bagi adil untuk $P(a, b, c)$.

Selanjutnya, andaikan ada sebuah hiperbola
$$H(C) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = C\} \tag{7.123}$$
di mana $C \in \mathbb{R}$ adalah konstanta, sehingga $y = C/x$.

Gradien garis singgung di titik $(x, y) \in H(C)$ adalah $m := dy/dx = -C/x^2$ sehingga gradien garis singgung di titik $(x_0, y_0) \in H(C)$ adalah $m_0 := -C/x_0^2$.

Garis singgung di titik $(x_0, y_0) \in H(C)$ adalah
$$L(m_0, n_0) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = m_0x + n_0\} \tag{7.124}$$
di mana $m_0, n_0 \in \mathbb{R}$ sehingga
$$y = (-C/x_0^2)x + n_0. \tag{7.125}$$
Dengan memasukkan $(x, y) = (x_0, y_0)$ ke persamaan terakhir, diperoleh
$$C/x_0 = -C/x_0 + n_0 \quad \text{alias} \quad n_0 = 2C/x_0 \tag{7.126}$$
sehingga
$$y = (-C/x_0^2)x + 2C/x_0 \quad \text{alias} \quad y = (-y_0/x_0)x + 2C/x_0 \tag{7.127}$$
alias
$$x_0y = -xy_0 + 2C \quad \text{alias} \quad x_0y + xy_0 = 2C \tag{7.128}$$
alias $(1/2)(x_0y + xy_0) = C$ yang merupakan prinsip bagi adil untuk $H(C)$.

Selanjutnya, tanpa pembuktian, disimpulkan bahwa garis singgung pada kurva
$$\gamma(A, B, C, D, E, F) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\} \tag{7.129}$$
di titik $(x_0, y_0) \in \gamma(A, B, C, D, E, F)$, di mana $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$, adalah
$$L(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\} \tag{7.130}$$
di mana $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ adalah sebuah fungsi sedemikian
$$f(x, y) = Ax_0x + (1/2)B(x_0y + xy_0) + Cy_0y + (1/2)D(x + x_0) + (1/2)E(y + y_0) + F \tag{7.131}$$
yang merupakan prinsip bagi adil untuk $\gamma(A, B, C, D, E, F)$.

7.20 Kebebasan Linier

Seperangkat m buah vektor $\vec{a}_j := \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\hat{x}_k \in \mathbb{R}^n$ untuk setiap $j \in \{1, \cdots, m\}$, di mana $a_{jk} \in \mathbb{R}$, serta

$$\hat{x}_k := (\underbrace{0, \cdots, 0, \overset{k}{1}, 0, \cdots, 0}_{n}), \tag{7.132}$$

dikatakan bebas linier apabila persamaan

$$\sum_{j=1}^{m} k_j \vec{a}_j = \vec{0}, \tag{7.133}$$

di mana $k_j \in \mathbb{R}$ untuk setiap $j \in \{1, \cdots, m\}$, memiliki penyelesaian sepele, yaitu $k_j = 0$ untuk setiap $j \in \{1, \cdots, m\}$.

Selanjutnya,

$$\sum_{j=1}^{m} k_j \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\hat{x}_k = \vec{0}. \tag{7.134}$$

Karena $\{\hat{x}_1, \cdots, \hat{x}_n\}$ pasti bebas linier, maka

$$\sum_{j=1}^{m} k_j a_{jk} = 0 \tag{7.135}$$

untuk setiap $k \in \{1, \cdots, n\}$, yang disajikan dalam bentuk matriks menjadi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = \left.\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\} n. \tag{7.136}$$

Apabila didefinisikan matriks

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{7.137}$$

$$K := \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix}, \quad \text{dan} \quad O_n := \left.\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\} n, \tag{7.138}$$

maka

$$AK = O_n \quad \text{alias} \quad A^{\mathsf{T}}AK = O_m. \tag{7.139}$$

Karena harus dikehendaki $K = O_m$ agar seperangkat m buah vektor tersebut bebas linier, maka haruslah

$$\det(A^{\mathsf{T}}A) \neq 0. \tag{7.140}$$

Inilah syarat agar seperangkat m buah vektor tersebut bebas linier.

Apabila $m > n$, maka pastilah selalu $\det(A^{\mathsf{T}}A) = 0$ sehingga seperangkat m buah vektor tersebut pasti gayut linier.

Apabila $m = n$, maka agar seperangkat m buah vektor tersebut bebas linier, syaratnya adalah $\det(A^{\mathsf{T}}) \det A \neq 0$ alias $(\det A)^2 \neq 0$ alias $\det A \neq 0$.

7.21 Kasus Aneh pada Lingkaran

Andaikan di $\mathbb{R}^2$ terdapat sebuah lingkaran $S^1(r) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$ di mana $r \in \mathbb{R}^+$.

Lantas, andaikan posisi titik A pada $S^1(r)$ adalah $\vec{a} = r(\hat{x}\cos\alpha + \hat{y}\sin\alpha)$ di mana $\hat{x} := (1,0)$ dan $\hat{y} := (0,1)$, dan posisi titik B adalah $\vec{b} = r(\hat{x}\cos\beta - \hat{y}\sin\beta)$. Di sini, $\alpha, \beta \in \{0\} \cup (0, 2\pi)$.

Tentu saja, $\vec{a}\cdot\hat{x} = r\cos\alpha$ dan $\vec{b}\cdot\hat{x} = r\cos\beta$ sehingga $\vec{a}\cdot\vec{b} = r^2\cos(\alpha+\beta)$.

Jika sudut yang dibentuk oleh vektor $\vec{a}-\vec{b}$ and $r\hat{x}-\vec{b}$ adalah γ, maka terdapat ungkapan

$$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(r\hat{x}-\vec{b}) = |\vec{a}-\vec{b}||r\hat{x}-\vec{b}|\cos\gamma \tag{7.141}$$

alias

$$\cos\gamma = \frac{1+\cos\alpha-\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}{2\sqrt{1-\cos(\alpha+\beta)}\sqrt{1-\cos\beta}}. \tag{7.142}$$

Pembilang dari persamaan terakhir adalah

$$N := 1+\cos\alpha-\cos\beta-\cos(\alpha+\beta). \tag{7.143}$$

$$N = 1+\cos\alpha-\cos\beta-(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta). \tag{7.144}$$

$$N = 2\sin^2(\beta/2)+2\cos\alpha\sin^2(\beta/2)+4\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)\sin(\beta/2)\cos(\beta/2). \tag{7.145}$$

$$N = 4\cos^2(\alpha/2)\sin^2(\beta/2)+4\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)\sin(\beta/2)\cos(\beta/2). \tag{7.146}$$

$$N = 4\cos(\alpha/2)\sin(\beta/2)(\cos(\alpha/2)\sin(\beta/2)+\sin(\alpha/2)\cos(\beta/2)). \tag{7.147}$$

$$N = 4\cos(\alpha/2)\sin(\beta/2)\sin((\alpha+\beta)/2). \tag{7.148}$$

Penyebutnya adalah

$$D := 2\sqrt{1-\cos(\alpha+\beta)}\sqrt{1-\cos\beta}. \tag{7.149}$$

$$D = 4|\sin(\beta/2)||\sin((\alpha+\beta)/2)|. \tag{7.150}$$

Oleh karena itu,

$$\cos\gamma = \frac{N}{D} = \cos(\alpha/2)\frac{\sin(\beta/2)\sin((\alpha+\beta)/2)}{|\sin(\beta/2)||\sin((\alpha+\beta)/2)|} \tag{7.151}$$

Jadi, γ bernilai $\alpha/2$ untuk $0 < \beta < 2\pi-\alpha$, dan bernilai $\pi-\alpha/2$ untuk $2\pi-\alpha < \beta < 2\pi$.

7.22 Suatu Identitas Vektor yang Tak Terduga

$$
\begin{aligned}
[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{d} &\equiv [\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})]\vec{d} \\
&= \epsilon_{jkl}a_j b_k c_l d_m \hat{x}_m \\
&= \delta_{jp}\delta_{mq}\epsilon_{jkl}a_p b_k c_l d_m \hat{x}_q \\
&= (\epsilon_{rjp}\epsilon_{rmq} - \epsilon_{rjq}\epsilon_{rmp} + \delta_{jq}\delta_{mp})\epsilon_{jkl}a_p b_k c_l d_m \hat{x}_q \\
&= \epsilon_{rjp}\epsilon_{rmq}\epsilon_{jkl}a_p b_k c_l d_m \hat{x}_q - \epsilon_{rjq}\epsilon_{rmp}\epsilon_{jkl}a_p b_k c_l d_m \hat{x}_q + \epsilon_{jkl}a_m b_k c_l d_m \hat{x}_j \\
&= \epsilon_{rjp}\epsilon_{rmq}(\vec{b}\times\vec{c})_j a_p d_m \hat{x}_q - \epsilon_{rjq}\epsilon_{rmp}(\vec{b}\times\vec{c})_j a_p d_m \hat{x}_q + (\vec{b}\times\vec{c})_j a_m d_m \hat{x}_j \\
&= [(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}]_r \epsilon_{rmq} d_m \hat{x}_q - \epsilon_{rjq}(\vec{d}\times\vec{a})_r(\vec{b}\times\vec{c})_j \hat{x}_q + (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\times\vec{c}) \\
&= [(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}]\times\vec{d} - (\vec{d}\times\vec{a})\times(\vec{b}\times\vec{c}) + (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\times\vec{c}) \\
&= [(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} - (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}]\times\vec{d} - (\vec{d}\times\vec{a})\times(\vec{b}\times\vec{c}) + (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\times\vec{c}) \\
&= (\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{c}\times\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\times\vec{d}) - [\vec{d}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})]\vec{a} + [\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})]\vec{d} + (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\times\vec{c})
\end{aligned}
$$

Ini berarti

$$[\vec{b},\vec{c},\vec{d}]\vec{a} = (\vec{b}\cdot\vec{a})(\vec{c}\times\vec{d}) + (\vec{c}\cdot\vec{a})(\vec{d}\times\vec{b}) + (\vec{d}\cdot\vec{a})(\vec{b}\times\vec{c}) \tag{7.152}$$

sehingga

$$\boxed{[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{d} = (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\times\vec{c}) + (\vec{b}\cdot\vec{d})(\vec{c}\times\vec{a}) + (\vec{c}\cdot\vec{d})(\vec{a}\times\vec{b}).} \tag{7.153}$$

7.23 Kabar Gembira dalam Analisis Vektor

Andaikan kita mendefinisikan produk skalar tripel dari 3 buah vektor $\vec{A}$, $\vec{B}$, dan $\vec{C}$, yaitu $[\vec{A},\vec{B},\vec{C}] := \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$.

Identitas vektor

$$[\vec{A},\vec{B},\vec{C}]\vec{D} = (\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\times\vec{C}) + (\vec{B}\cdot\vec{D})(\vec{C}\times\vec{A}) + (\vec{C}\cdot\vec{D})(\vec{A}\times\vec{B}) \tag{7.154}$$

dapat membuktikan bahwa

1. perkalian antara skalar semu dengan vektor sejati menghasilkan vektor semu,

2. perkalian antara skalar semu dengan vektor semu menghasilkan vektor sejati,

3. perkalian antara skalar semu dengan skalar semu dengan skalar semu menghasilkan skalar sejati,

4. dan sebagainya,

dengan cara mengutak-atik identitas vektor di atas tersebut.

7.24 Perkalian antara Dua Buah Bentuk Produk Skalar Tripel

Andaikan ada dua buah bentuk produk skalar tripel, yaitu

$$\alpha := \frac{1}{3!}\alpha_{ijk}[\hat{x}_i, \hat{x}_j, \hat{x}_k] \quad \text{dan} \quad \beta = \frac{1}{3!}\beta_{lmn}[\hat{x}_l, \hat{x}_m, \hat{x}_n] \tag{7.155}$$

di mana di sini telah digunakan kesepakatan penjumlahan Einstein untuk indeks berulang. Indeks i, j, k, l, m, n bergerak dari 1 sampai dengan $p \in \mathbb{N}$. Di sini, $\alpha_{ijk} \in \mathbb{R}$ dan $\beta_{lmn} \in \mathbb{R}$ bersifat antisimetris berturut-turut terhadap pertukaran indeks i, j, k dan l, m, n. Demikian pula didefinisikan

$$\hat{x}_i := (\underbrace{0, \cdots, 0, \overset{i}{1}, 0, \cdots, 0}_{p}) \tag{7.156}$$

untuk setiap $i \in \{1, \cdots, p\}$. Selain itu, didefinisikan $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] := (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Tentu saja,

$$\alpha\beta = \frac{1}{3!^2}\alpha_{ijk}\beta_{lmn}\begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}. \tag{7.157}$$

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= \frac{1}{3!^2}\alpha_{ijk}\beta_{lmn}(\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} \\ &\quad -\delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}). \end{aligned} \tag{7.158}$$

$$\alpha\beta = \frac{1}{3!^2}\alpha_{ijk}(\beta_{ijk} + \beta_{kij} + \beta_{jki} - \beta_{ikj} - \beta_{jik} - \beta_{kji}). \tag{7.159}$$

$$\alpha\beta = \frac{1}{3!}\alpha_{ijk}\beta_{ijk}. \tag{7.160}$$

Apabila sebagai contoh, $p = 3$, maka

$$\alpha\beta = \frac{1}{3!}(\alpha_{123}\beta_{123} + \alpha_{132}\beta_{132} + \alpha_{213}\beta_{213} + \alpha_{231}\beta_{231} + \alpha_{312}\beta_{312} + \alpha_{321}\beta_{321}) \tag{7.161}$$

sehingga

$$\alpha\beta = \alpha_{123}\beta_{123}. \tag{7.162}$$

7.25 Tensor Sejati dan Tensor Semu

Tensor adalah bentuk umum dari skalar dan vektor. Skalar itu tidak lain adalah tensor rank-0. Vektor itu tidak lain adalah tensor rank-1. Skalar S, vektor $\vec{V} := V_i\hat{x}_i$, tensor rank-2 $\overleftrightarrow{T} := T_{ij}\hat{x}_i \otimes \hat{x}_j$ masing-masing dapat diuraikan menjadi komponen sejatinya (yaitu S_+, $\vec{V}_+$, dan $\overleftrightarrow{T}_+$) dan komponen semunya (yaitu S_-, $\vec{V}_-$, dan $\overleftrightarrow{T}_-$). Sifat skalar sejati, vektor sejati, dan tensor rank-2 sejati tersebut adalah bahwa apabila variabel ruangnya dikenai transformasi $R \in O(n)$, maka $S'_+ = S_+$, $V'_{+i} = R_{ij}V_{+j}$, dan $T'_{+ij} = R_{ik}R_{jl}T_{+kl}$. Sifat skalar semu, vektor semu, dan tensor rank-2 semu tersebut adalah bahwa apabila variabel ruangnya dikenai transformasi $R \in O(n)$, maka $S'_- = (\det R)S_-$, $V'_{-i} = (\det R)R_{ij}V_{-j}$, dan $T'_{-ij} = (\det R)R_{ik}R_{jl}T_{-kl}$.

7.26 Skalar Sejati dan Skalar Semu

Skalar sejati S_+ di $\mathbb{R}^n$ adalah medan skalar yang bergantung pada variabel ruang, yang apabila variabel ruang tersebut dikenai transformasi yang diwakili oleh matriks riil $R \in O(n)$ berlarik $n \times n$, maka medan skalar tersebut tidak berubah, yaitu bahwa $S'_+ = S_+$.

Skalar semu S_- di $\mathbb{R}^n$ adalah medan skalar yang bergantung pada variabel ruang, yang apabila variabel ruang tersebut dikenai transformasi yang diwakili oleh matriks riil $R \in O(n)$ berlarik $n \times n$, maka medan skalar tersebut berubah, yaitu bahwa $S'_- = (\det R)S_-$.

Sebuah medan skalar S di $\mathbb{R}^n$ dapat diuraikan sebagai kombinasi dari skalar sejati dan skalar semu, yaitu $S = S_+ + S_-$. Apabila S dikenai transformasi $R \in O(n)$, maka $S' = S'_+ + S'_- = S_+ + (\det R)S_-$. Dalam bentuk matriks, kedua persamaan tersebut dapat disajikan sebagai

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \det R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_+ \\ S_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S \\ S' \end{pmatrix}, \tag{7.163}$$

yang melalui aturan Cramer, penyelesaiannya adalah

$$\boxed{S_+ = \frac{S' - (\det R)S}{1 - \det R}} \qquad \text{dan} \qquad \boxed{S_- = \frac{S - S'}{1 - \det R}.} \tag{7.164}$$

7.27 Hasil Kali Silang antara Dua Vektor Sejati

Andaikan $\vec{a} := a_i\hat{x}_i$ dan $\vec{b} := b_i\hat{x}_i$ adalah dua buah vektor sejati di $\mathbb{R}^3$. Andaikan kita definisikan vektor $\vec{c} := c_i\hat{x}_i = \vec{a} \times \vec{b}$ yang akan ditransformasikan oleh matriks $R \in O(3)$ menjadi vektor $\vec{c}' := c'_i\hat{x}'_i$, sehingga

$$\begin{aligned} \vec{c}' &= c'_s\hat{x}'_s = (\vec{a} \times \vec{b})' = (\epsilon_{jkl}\hat{x}_j a_k b_l)' = \epsilon_{jkl}\hat{x}'_j a'_k b'_l \\ &= \epsilon_{jkl}R_{jm}\hat{x}_m R_{kp}a_p R_{lq}b_q = (\det R)\epsilon_{mpq}\hat{x}_m a_p b_q \\ &= (\det R)\vec{a} \times \vec{b} = (\det R)\vec{c} = (\det R)c_m\hat{x}_m \\ &= (\det R)c_m R_{sm}\hat{x}'_s \end{aligned} \tag{7.165}$$

sehingga $c'_s = (\det R)R_{sm}c_m$. Ini berarti bahwa $\vec{c}$ adalah vektor semu.

7.28 Perkalian antara Dua Buah Skalar Semu

Andaikan $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}, \vec{E}, \vec{F} \in \mathbb{R}^n$ adalah enam buah vektor.

Ada teorema yang menyatakan bahwa

$$[\vec{A},\vec{B},\vec{C}]\vec{D} = (\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\times\vec{C}) + (\vec{B}\cdot\vec{D})(\vec{C}\times\vec{A}) + (\vec{C}\cdot\vec{D})(\vec{A}\times\vec{B}) \tag{7.166}$$

di mana didefinisikan $[\vec{A},\vec{B},\vec{C}] := (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$.

Dengan mengalititikkan kedua ruas persamaan terakhir dengan $\vec{E}\times\vec{F}$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}[\vec{A},\vec{B},\vec{C}][\vec{D},\vec{E},\vec{F}] &= (\vec{A}\cdot\vec{D})[(\vec{B}\cdot\vec{E})(\vec{C}\cdot\vec{F}) - (\vec{B}\cdot\vec{F})(\vec{C}\cdot\vec{E})] \\ &\quad +(\vec{B}\cdot\vec{D})[(\vec{C}\cdot\vec{E})(\vec{A}\cdot\vec{F}) - (\vec{C}\cdot\vec{F})(\vec{A}\cdot\vec{E})] \\ &\quad +(\vec{C}\cdot\vec{D})[(\vec{A}\cdot\vec{E})(\vec{B}\cdot\vec{F}) - (\vec{A}\cdot\vec{F})(\vec{B}\cdot\vec{E})]. \end{aligned} \tag{7.167}$$

Andaikan ada sebuah basis ortonormal, yaitu $\{\hat{x}_1,\cdots,\hat{x}_n\}$, di mana

$$\hat{x}_j := (\underbrace{0,\cdots,0,\overset{j}{1},0,\cdots,0}_{n}), \tag{7.168}$$

untuk setiap $j\in\{1,\cdots,n\}$, maka

$$[\hat{x}_i,\hat{x}_j,\hat{x}_k][\hat{x}_l,\hat{x}_m,\hat{x}_p] = \delta_{il}[\delta_{jm}\delta_{kp}-\delta_{jp}\delta_{km}]+\delta_{jl}[\delta_{km}\delta_{ip}-\delta_{kp}\delta_{im}]+\delta_{kl}[\delta_{im}\delta_{jp}-\delta_{ip}\delta_{jm}] \tag{7.169}$$

untuk setiap $i,j,k,l,m,p\in\{1,\cdots,n\}$, di mana δ adalah delta Kronecker.

Dalam bentuk determinan, kita peroleh

$$[\vec{A},\vec{B},\vec{C}][\vec{D},\vec{E},\vec{F}] = \begin{vmatrix}\vec{A}\cdot\vec{D} & \vec{A}\cdot\vec{E} & \vec{A}\cdot\vec{F}\\ \vec{B}\cdot\vec{D} & \vec{B}\cdot\vec{E} & \vec{B}\cdot\vec{F}\\ \vec{C}\cdot\vec{D} & \vec{C}\cdot\vec{E} & \vec{C}\cdot\vec{F}\end{vmatrix}. \tag{7.170}$$

7.29 Turunan Vektor Basis Satuan Azimutal terhadap Koordinat Azimutal

Andaikan $r\in\mathbb{R}^+$, $\theta\in(0,\pi)$, dan $\phi\in\{0\}\cup(0,2\pi)$.

$$\partial\hat{\phi}/\partial\phi = (\partial/\partial\phi)(\vec{e}_\phi/|\vec{e}_\phi|). \tag{7.171}$$

$$\vec{e}_\phi = \partial\vec{r}/\partial\phi. \tag{7.172}$$

$$\vec{r} = \hat{x}r\sin\theta\cos\phi + \hat{y}r\sin\theta\sin\phi + \hat{z}r\cos\theta. \tag{7.173}$$

$$\vec{e}_\phi = -\hat{x}r\sin\theta\sin\phi + \hat{y}r\sin\theta\cos\phi. \tag{7.174}$$

$$|\vec{e}_\phi| = r\sin\theta. \tag{7.175}$$

$$\hat{\phi} = \vec{e}_\phi/|\vec{e}_\phi| = -\hat{x}\sin\phi + \hat{y}\cos\phi. \tag{7.176}$$

$$\partial\hat{\phi}/\partial\phi = -(\hat{x}\cos\phi + \hat{y}\sin\phi). \tag{7.177}$$

$$\hat{r} = \hat{x}\sin\theta\cos\phi + \hat{y}\sin\theta\sin\phi + \hat{z}\cos\theta. \tag{7.178}$$

$$\hat{\theta} = \vec{e}_\theta/|\vec{e}_\theta|. \tag{7.179}$$

$$\vec{e}_\theta = \partial\vec{r}/\partial\theta = \hat{x}r\cos\theta\cos\phi + \hat{y}r\cos\theta\sin\phi - \hat{z}r\sin\theta. \tag{7.180}$$

$$|\vec{e}_\theta| = r. \tag{7.181}$$

$$\hat{\theta} = \hat{x}\cos\theta\cos\phi + \hat{y}\cos\theta\sin\phi - \hat{z}\sin\theta. \tag{7.182}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix}. \tag{7.183}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{vmatrix} = 1. \tag{7.184}$$

$$\hat{x} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \hat{r} & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \hat{\theta} & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ \hat{\phi} & \cos\phi & 0 \end{vmatrix} = \hat{r}\sin\theta\cos\phi + \hat{\theta}\cos\theta\cos\phi - \hat{\phi}\sin\phi. \tag{7.185}$$

$$\hat{y} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & \hat{r} & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \hat{\theta} & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \hat{\phi} & 0 \end{vmatrix} = \hat{r}\sin\theta\sin\phi + \hat{\theta}\cos\theta\sin\phi + \hat{\phi}\cos\phi. \tag{7.186}$$

$$\begin{aligned} \partial\hat{\phi}/\partial\phi &= -((\hat{r}\sin\theta\cos\phi + \hat{\theta}\cos\theta\cos\phi - \hat{\phi}\sin\phi)\cos\phi \\ &\quad +(\hat{r}\sin\theta\sin\phi + \hat{\theta}\cos\theta\sin\phi + \hat{\phi}\cos\phi)\sin\phi). \end{aligned} \tag{7.187}$$

$$\partial\hat{\phi}/\partial\phi = -(\hat{r}\sin\theta + \hat{\theta}\cos\theta). \tag{7.188}$$

7.30 Jarak Rata-Rata Dua Buah Objek Geometris

Pada kesempatan ini, saya akan menerangkan konsep jarak rata-rata dua buah objek geometris.

Andaikan ada dua buah objek di $\mathbb{R}^3$, yaitu $A := \{\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_n\}$ dan $A' := \{\vec{r}'_1, \cdots, \vec{r}'_{n'}\}$ di mana titik $\vec{r}_j$ bermassa m_j untuk semua $j \in \{1, \cdots, n\}$, dan titik $\vec{r}'_{j'}$ bermassa $m'_{j'}$ untuk semua $j' \in \{1, \cdots, n'\}$. Jarak euklidean rata-rata objek A terhadap objek A' tentu saja adalah

$$\delta = \frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{j'=1}^{n'} |\vec{r}_j - \vec{r}'_{j'}| m_j m'_{j'}}{\sum_{k=1}^{n} m_k \sum_{k'=1}^{n'} m'_{k'}}. \tag{7.189}$$

Untuk agihan kontinyu, apabila terdapat dua buah objek, yaitu M dan M' sedemikian untuk setiap $\vec{r} \in M$ bermassa dm, dan untuk setiap $\vec{r}' \in M'$ bermassa dm', maka jarak eukidean rata-rata antara objek M dan M' adalah

$$\delta = \frac{\int_M \int_{M'} |\vec{r} - \vec{r}'| dm' dm}{\int_M dm \int_{M'} dm'}. \tag{7.190}$$

Contoh penerapannya adalah sebagai berikut. Apabila ada sebuah penggal garis lurus di ruang $\mathbb{R}^3$, yaitu

$$S := \{(0, 0, z) \mid z \in [0, L]\} \tag{7.191}$$

di mana $L \in \mathbb{R}^+$, yang mana rapat massanya seragam. Tentu saja jarak euklidean rata-rata objek S terhadap dirinya sendiri adalah δ.

$$\begin{aligned}
\delta &= \frac{1}{L^2}\int_0^L\int_0^L |z-z'|dz\,dz'. \\
&= \frac{1}{2L^2}\int_0^L (z-z')^2\,\mathrm{sgn}(z-z')|_0^L dz'. \\
&= \frac{1}{2L^2}\int_0^L \left((L-z')^2\,\mathrm{sgn}(L-z') - z'^2\,\mathrm{sgn}(-z')\right) dz'. \\
&= \frac{1}{2L^2}\left(-\int_0^L (z'-L)^2\,\mathrm{sgn}(z'-L)dz' + \int_0^L z'^2\,\mathrm{sgn}\,z'\,dz'.\right). \\
&= \frac{1}{6L^2}\left(-(z'-L)^3\,\mathrm{sgn}(z'-L)|_0^L + z'^3\,\mathrm{sgn}\,z'|_0^L\right). \\
&= \frac{1}{6L^2}\left((-L)^3\,\mathrm{sgn}(-L) + L^3\,\mathrm{sgn}\,L\right). \\
&= \frac{1}{6L^2}(L^3+L^3) = \frac{L}{3}.
\end{aligned} \tag{7.192}$$

Jadi, jarak euklidean rata-rata ruas garis S tersebut terhadap dirinya sendiri adalah $L/3$.

7.31 Keanehan Bentuk Tak Tentu dalam Analisis Vektor

Andaikan ada sebuah vektor posisi $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$. Mungkin kita semua akan mengira bahwa ungkapan $3|\vec{r}|^2/|\vec{r}|^5 - 3/|\vec{r}|^3$ itu bernilai nol untuk setiap $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$. Ternyata dugaan ini keliru, sebab apabila $\vec{r} = \vec{0}$, maka ungkapan $3|\vec{r}|^2/|\vec{r}|^5 - 3/|\vec{r}|^3$ tidaklah bernilai nol mengingat $3(0)/0-3/0$ itu merupakan bentuk tak tentu. Pada kesempatan ini, saya akan menunjukkan hasil yang sebenarnya dari $3|\vec{r}|^2/|\vec{r}|^5 - 3/|\vec{r}|^3$, yaitu bahwa ternyata

$$3|\vec{r}|^2/|\vec{r}|^5 - 3/|\vec{r}|^3 = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r}) \tag{7.193}$$

di mana $\delta^{(3)}$ adalah delta Dirac pada ruang $\mathbb{R}^3$.

Untuk menunjukkan kesamaan terakhir ini, mula-mula kita akan menghitung nilai $\nabla^2(1/|\vec{r}|)$ untuk semua $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$.

Dengan analisis vektor dan kesepakatan penjumlahan Einstein untuk indeks berulang, kita peroleh bahwa $\nabla^2(1/|\vec{r}|) = \partial_j\partial_j(x_kx_k)^{-1/2} = -\partial_j(x_j(x_kx_k)^{-3/2}) = -3(x_kx_k)^{-3/2} + 3x_jx_j(x_kx_k)^{-5/2} = 3|\vec{r}|^2/|\vec{r}|^5 - 3/|\vec{r}|^3$, di mana x_j didefinisikan sedemikian $\vec{r} := x_j\hat{x}_j$ dengan $\{\hat{x}_j \mid j \in \{1,2,3\}\}$ adalah basis ortonormal, serta didefinisikan $\partial_j := \partial/\partial x_j$. Di sini kita tidak dapat mengatakan bahwa $|\vec{r}|^2/|\vec{r}|^5 = 1/|\vec{r}|^3$, sebab apabila $\vec{r} = \vec{0}$, ungkapan tersebut tidak berlaku, mengingat $0/0$ adalah bentuk tak tentu.

Selanjutnya, kita akan mencoba menerapkan teorema Stokes, yaitu

$$\oint_{\partial V} \vec{A}\cdot d^2\vec{r} = \int_V \nabla\cdot\vec{A}d^3\vec{r}. \tag{7.194}$$

Dengan memisalkan $\vec{A} := \nabla(1/|\vec{r}|)$ dan $V := \mathbb{R}^3$, maka diperoleh

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla^2(1/|\vec{r}|) d^3\vec{r} = \oint_{\partial\mathbb{R}^3} \nabla(1/|\vec{r}|) \cdot d^2\vec{r}. \tag{7.195}$$

Karena diketahui bahwa

$$d^2\vec{r} := \hat{r}|\vec{r}|^2 \sin\theta d\theta \wedge d\phi + \hat{\theta}|\vec{r}| \sin\theta d\phi \wedge d|\vec{r}| + \hat{\phi}|\vec{r}| d|\vec{r}| \wedge d\theta \tag{7.196}$$

di mana $\hat{r} := \vec{r}/|\vec{r}|$, $\theta := \arctan_2(x_3, \sqrt{x_1^2 + x_2^2})$, $\phi := \arctan_2(x_1, x_2)$, $\hat{\theta} := \vec{e}_\theta/|\vec{e}_\theta|$, $\hat{\phi} := \vec{e}_\phi/|\vec{e}_\phi|$, $\vec{e}_\theta := \partial\vec{r}/\partial\theta$, dan $\vec{e}_\phi := \partial\vec{r}/\partial\phi$, maka

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla^2(1/|\vec{r}|) d^3\vec{r} = -\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta d\phi = -4\pi. \tag{7.197}$$

Terpaksa, kita anggap bahwa $\nabla^2(1/|\vec{r}|) = \alpha\delta^{(3)}(\vec{r})$ di mana $\alpha \in \mathbb{R}$ adalah tetapan. Dari sifat delta Dirac, yaitu

$$\int_{\mathbb{R}^3} \delta^{(3)}(\vec{r}) d^3\vec{r} = 1, \tag{7.198}$$

maka diperoleh $\alpha = -4\pi$, sehingga

$$\nabla^2(1/|\vec{r}|) = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r}). \tag{7.199}$$

Karena tadi, kita peroleh bahwa

$$\nabla^2(1/|\vec{r}|) = 3|\vec{r}|^2/|\vec{r}|^5 - 3/|\vec{r}|^3, \tag{7.200}$$

maka akhirnya, terbuktilah bahwa

$$3|\vec{r}|^2/|\vec{r}|^5 - 3/|\vec{r}|^3 = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r}). \tag{7.201}$$

7.32 Luas Sebuah Kerucut yang Dibatasi oleh Sebuah Silinder . Sebuah Contoh

Misalkan ada sebuah permukaan kerucut

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 3z^2\}. \tag{7.202}$$

Misalkan ada sebuah daerah

$$D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0\}. \tag{7.203}$$

Misalkan ada sebuah silinder pejal

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + (y-2)^2 \leq 4\}. \tag{7.204}$$

Kita diminta untuk mencari luas dari $K \cap D \cap S$.

Melalui proses parameterisasi dari K, kita peroleh

$$x = \sqrt{3}r\cos\alpha, \quad y = \sqrt{3}r\sin\alpha, \quad \text{dan} \quad z = r, \tag{7.205}$$

di mana $r \in \mathbb{R}$ dan $\alpha \in [0, 2\pi]$.

Tentu saja haruslah $r \geq 0$.

Untuk mencari batas-batas yang sebenarnya dari r dan α, kita lakukan perhitungan

$$3r^2 \cos^2 \alpha + (\sqrt{3} r \sin \alpha - 2)^2 \leq 4 \tag{7.206}$$

alias

$$3r^2 - 4\sqrt{3} r \sin \alpha \leq 0 \tag{7.207}$$

alias

$$r(\sqrt{3} r - 4 \sin \alpha) \leq 0. \tag{7.208}$$

Karena tadi sudah ditetapkan $r \geq 0$, maka haruslah

$$0 \leq r \leq (4/\sqrt{3}) \sin \alpha \tag{7.209}$$

untuk $0 \leq \alpha \leq \pi$.

Kita tinggal menghitung $|d^2\vec{r}|$, di mana $\vec{r} := (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ adalah vektor posisi yang bergantung pada r dan α.

Tentu saja,

$$d^2\vec{r} := \hat{x} dy \wedge dz + \hat{y} dz \wedge dx + \hat{z} dx \wedge dy \tag{7.210}$$

di mana $\hat{x} := (1, 0, 0)$, $\hat{y} := (0, 1, 0)$, dan $\hat{z} := (0, 0, 1)$.

Dengan menggunakan Jacobian, kita peroleh

$$d^2\vec{r} = \left(\hat{x} \begin{vmatrix} \partial y/\partial r & \partial y/\partial \alpha \\ \partial z/\partial r & \partial z/\partial \alpha \end{vmatrix} + \hat{y} \begin{vmatrix} \partial z/\partial r & \partial z/\partial \alpha \\ \partial x/\partial r & \partial x/\partial \alpha \end{vmatrix} + \hat{z} \begin{vmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial \alpha \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial \alpha \end{vmatrix} \right) dr \wedge d\alpha \tag{7.211}$$

alias

$$|d^2\vec{r}| = 2\sqrt{3} r \, dr \, d\alpha. \tag{7.212}$$

Tentu saja luas dari $K \cap D \cap S$ adalah

$$A := \int_{K \cap D \cap S} |d^2\vec{r}| \tag{7.213}$$

alias

$$A = 2\sqrt{3} \int_0^{\pi} \int_0^{(4/\sqrt{3}) \sin \alpha} r \, dr \, d\alpha \tag{7.214}$$

alias

$$A = \frac{16}{3}\sqrt{3} \int_0^{\pi} \sin^2 \alpha \, d\alpha = \frac{8}{3}\sqrt{3}\pi. \tag{7.215}$$

Sepintas metode ini sangat berbeda dengan metode pada umumnya, dan cenderung sangat bertele-tele. Namun demikian, metode ini telah terbukti sangat ampuh untuk menghitung luas permukaan lengkung yang tidak dapat dihitung dengan metode pada umumnya, serta integralnya cenderung lebih mudah dihitung daripada integral yang muncul dalam metode pada umumnya.

7.33 Volume Bangun Ruang yang Dibatasi oleh Silinder dan Bidang Datar

Misalkan ada sebuah silinder pejal

$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + y^2 \leq a^2\} \tag{7.216}$$

di mana $a \in \mathbb{R}^+$.

Misalkan ada sebuah daerah

$$Z := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0\}. \tag{7.217}$$

Misalkan ada sebuah daerah

$$Y := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \geq 0\}. \tag{7.218}$$

Misalkan ada sebuah daerah

$$D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \leq my\} \tag{7.219}$$

di mana $m \in \mathbb{R}^+$.

Kita diminta untuk mencari volume dari $K := S \cap Z \cap Y \cap D$.

Kita dapat menuliskan

$$4x^2 + y^2 = s^2 \tag{7.220}$$

di mana $0 \leq s \leq a$.

Melalui parameterisasi, kita peroleh

$$x = (1/2)s\cos\alpha, \qquad y = s\sin\alpha, \qquad \text{dan} \qquad z = t \tag{7.221}$$

di mana $\alpha \in [0, 2\pi]$. Tentu saja, haruslah $t \geq 0$.

Tentu saja, haruslah $s\sin\alpha \geq 0$ sehingga $\sin\alpha \geq 0$ karena $s \geq 0$ yang mengharuskan $0 \leq \alpha \leq \pi$ karena $\alpha \in [0, 2\pi]$. Haruslah pula, $0 \leq t \leq ms\sin\alpha$.

Elemen volume berarah infinitesimal kecil yang menyusun K adalah

$$dx \wedge dy \wedge dz = \begin{vmatrix} \partial x/\partial s & \partial x/\partial \alpha & \partial x/\partial t \\ \partial y/\partial s & \partial y/\partial \alpha & \partial y/\partial t \\ \partial z/\partial s & \partial z/\partial \alpha & \partial z/\partial t \end{vmatrix} ds \wedge d\alpha \wedge dt \tag{7.222}$$

alias

$$dx \wedge dy \wedge dz = (1/2)s\, ds \wedge d\alpha \wedge dt. \tag{7.223}$$

Oleh karena itu, volume dari K adalah

$$V = \int_K |dx \wedge dy \wedge dz|. \tag{7.224}$$

$$V = \frac{1}{2}\int_0^a \int_0^\pi \int_0^{ms\sin\alpha} s\, dt\, d\alpha\, ds. \tag{7.225}$$

$$V = \frac{1}{2}\int_0^a \int_0^\pi s^2 \sin\alpha\, d\alpha\, ds = m\int_0^a s^2 ds = \frac{1}{3}ma^3. \tag{7.226}$$

7.34 Deret Fourier

Suatu fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dikatakan *periodik* dengan periode $T \in \mathbb{R}^+$ apabila $f(t+T) = f(t)$ untuk setiap $t \in \mathbb{R}$. Setiap fungsi periodik f ini dapat dinyatakan sebagai *deret Fourier*

$$f(t) = Ka_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi t}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi t}{T} \right) \tag{7.227}$$

di mana $K, a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$ adalah tetapan yang hendak dicari kemudian, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Interval periode dari f adalah himpunan interval terbuka $(c, c+T) \subseteq \mathbb{R}$ untuk suatu $c \in \mathbb{R}$. Apabila didefinisikan $2\pi t/T =: u$, maka persamaan (7.227) dapat ditulis kembali menjadi

$$f(t) = Ka_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nu + b_n \sin nu) \tag{7.228}$$

sehingga

$$\int_{2\pi c/T}^{2\pi(c+T)/T} f(t)\, du = 2\pi K a_0 \tag{7.229}$$

alias

$$a_0 = \frac{1}{KT} \int_c^{c+T} f(t)\, dt. \tag{7.230}$$

Demikian pula,

$$\int_{2\pi c/T}^{2\pi(c+T)/T} f(t) \cos mu\, du = \pi \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{mn} \equiv \pi a_m \tag{7.231}$$

alias

$$a_n = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(t) \cos \frac{2n\pi t}{T} dt \tag{7.232}$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Demikian pula,

$$\int_{2\pi c/T}^{2\pi(c+T)/T} f(t) \sin mu\, du = \pi \sum_{n=1}^{\infty} b_n \delta_{mn} \equiv \pi b_m \tag{7.233}$$

alias

$$b_n = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(t) \sin \frac{2n\pi t}{T} dt. \tag{7.234}$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Agar persamaan (7.230) dan (7.232) memiliki bentuk yang seragam, maka haruslah $K = 1/2$, sehingga persamaan (7.227) dapat ditulis kembali menjadi

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi t}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi t}{T} \right). \tag{7.235}$$

Perpaduan antara persamaan (7.230) dan (7.232) adalah

$$a_n = \frac{2}{T}\int_c^{c+T} f(t)\cos\frac{2n\pi t}{T}dt \tag{7.236}$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}_0$.

Karena $\cos\alpha = (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})/2$ dan $\sin\alpha = (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})/(2i)$, maka persamaan dapat ditulis kembali menjadi

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n(e^{2in\pi t/T} + e^{-2in\pi t/T}) - ib_n(e^{2in\pi t/T} - e^{-2in\pi t/T})\right). \tag{7.237}$$

alias

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2in\pi t/T} \tag{7.238}$$

di mana

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{T}\int_c^{c+T} f(t)\,dt \tag{7.239}$$

serta

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{T}\int_c^{c+T} f(t)e^{-2in\pi t/T}dt \tag{7.240}$$

dan

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{T}\int_c^{c+T} f(t)e^{2in\pi t/T}dt \tag{7.241}$$

keduanya untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Gabungan dari persamaan (7.239), (7.240), dan (7.241) adalah

$$c_n = \frac{1}{T}\int_c^{c+T} f(t)e^{-2in\pi t/T}dt \tag{7.242}$$

untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$.

Tentu saja, dari persamaan (7.235), diperoleh

$$\langle f^2\rangle_{(c,c+T)} := \frac{1}{T}\int_c^{c+T}(f(t))^2dt = \frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \tag{7.243}$$

yang merupakan *identitas Parseval* untuk deret Fourier.

Dari persamaan (7.239), (7.240), dan (7.241), diperoleh

$$a_0 = 2c_0, \qquad a_n = c_n + c_{-n}, \qquad \text{dan} \qquad b_n = i(c_n - c_{-n}) \tag{7.244}$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, sehingga persamaan (7.243) menjadi

$$\begin{aligned}\langle f^2\rangle_{(c,c+T)} &= c_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}((c_n^2 + c_{-n}^2 + 2c_nc_{-n}) - (c_n^2 + c_{-n}^2 - 2c_nc_{-n})) \\ &= c_0^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_nc_{-n} = c_0^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|^2 \end{aligned} \tag{7.245}$$

yang merupakan bentuk lain dari identitas Parseval untuk deret Fourier, mengingat $c_{-n} = c_n^*$ dari persamaan (7.240) dan (7.241).

7.35 Persamaan Bernoulli

Persamaan diferensial Bernoulli adalah

$$y' + Py = Q \tag{7.246}$$

di mana $x, y \in \mathbb{R}$, $y \mapsto x$, $y' := dy/dx$, dan $P, Q \mapsto x$.

Jika kedua ruas persamaan (7.246) dikalikan dengan e^I, sedemikian $dI/dx = P$ alias $I = I_0 + \int_0^x P\,dx$, di mana I_0 konstan, maka persamaan tersebut menjadi

$$\frac{d}{dx}(ye^I) = Qe^I. \tag{7.247}$$

Pengintegralan persamaan (7.247) menghasilkan

$$ye^I - y_0 e^{I_0} = \int_0^x Qe^I dx \tag{7.248}$$

alias

$$y = e^{-I}\left(y_0 e^{I_0} + \int_0^x Qe^I dx\right) \tag{7.249}$$

alias

$$y = e^{-\int_0^x P\,dx}\left(y_0 + \int_0^x Qe^{\int_0^x P\,dx} dx\right) \tag{7.250}$$

yang merupakan penyelesaian umum dari persamaan (7.246).

Sekarang, andaikan ada persamaan diferensial yang lebih umum daripada persamaan (7.246), yaitu

$$y' + Py = Qy^n \tag{7.251}$$

di mana $n \in \mathbb{R}$. Substitusi $z := y^{1-n}$ alias $y = z^{1/(1-n)}$ menghasilkan $z' := dz/dx = (1-n)y^{-n}y'$ alias $y' = (1-n)^{-1}y^n z' = (1-n)^{-1}z^{n/(1-n)}z'$, sehingga persamaan (7.251) menjadi

$$(1-n)^{-1}z^{n/(1-n)}z' + Pz^{1/(1-n)} = Qz^{n/(1-n)}. \tag{7.252}$$

Apabila kedua ruas persamaan (7.252) dikalikan dengan $(1-n)z^{-n/(1-n)}$, maka persamaan tersebut menjadi

$$z' + (1-n)Pz = (1-n)Q, \tag{7.253}$$

sehingga

$$z = y^{1-n} = e^{-(1-n)\int_0^x P\,dx}\left(z_0 + (1-n)\int_0^x Qe^{(1-n)\int_0^x Pdx} dx\right) \tag{7.254}$$

alias

$$y = \left(e^{-(1-n)\int_0^x P\,dx}\left(y_0^{1-n} + (1-n)\int_0^x Qe^{(1-n)\int_0^x Pdx} dx\right)\right)^{1/(1-n)} \tag{7.255}$$

yang merupakan penyelesaian umum dari persamaan (7.251).

7.36 Persamaan Diferensial Linier Orde-2

Persamaan diferensial orde-2 berbentuk

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{7.256}$$

di mana $a, b, c, x, y \in \mathbb{R}$, $y \mapsto x$, $y' := dy/dx$, dan $y'' := dy'/dx$.

Persamaan (7.256) itu identik dengan

$$(d/dx - k_+)(d/dx - k_-)y = 0 \tag{7.257}$$

di mana

$$k_\pm := \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{7.258}$$

Apabila didefinisikan

$$z := (d/dx - k_-)y \equiv y' - k_- y, \tag{7.259}$$

maka persamaan (7.257) menjadi

$$(d/dx - k_+)z = 0 \quad \text{alias} \quad z' = k_+ z \quad \text{alias} \quad dz/z = k_+ dx. \tag{7.260}$$

Pengintegralan persamaan (7.260) menghasilkan

$$\ln(z/z_0) = k_+ x \quad \text{alias} \quad z = z_0 e^{k_+ x} = (y'_0 - k_- y_0)e^{k_+ x}. \tag{7.261}$$

Dengan memasukkan nilai z dari persamaan (7.261) ke persamaan (7.259), diperoleh

$$y' - k_- y = (y'_0 - k_- y_0)e^{k_+ x} \tag{7.262}$$

yang merupakan persamaan Bernoulli, yang penyelesaiannya adalah

$$\begin{aligned} y &= e^{k_- x}\left(y_0 + (y'_0 - k_- y_0)\int_0^x e^{(k_+ - k_-)x} dx\right) \\ &= e^{k_- x}\left(y_0 + \frac{y'_0 - k_- y_0}{k_+ - k_-}(e^{(k_+ - k_-)x} - 1)\right) \\ &= e^{k_- x}\frac{(k_+ - k_-)y_0 + (y'_0 - k_- y_0)(e^{(k_+ - k_-)x} - 1)}{k_+ - k_-} \\ &= e^{k_- x}\frac{(k_+ y_0 - y'_0) + (y'_0 - k_- y_0)e^{(k_+ - k_-)x}}{k_+ - k_-} \end{aligned} \tag{7.263}$$

alias

$$y = \frac{(y'_0 - k_- y_0)e^{k_+ x} + (k_+ y_0 - y'_0)e^{k_- x}}{k_+ - k_-} \tag{7.264}$$

yang merupakan penyelesaian umum dari persamaan (7.256).

Apabila $k_- = k_+ = k$, maka persamaan (7.264) menjadi

$$\begin{aligned} y &= \lim_{k_- \to k} \frac{(y'_0 - k_- y_0)e^{kx} + (ky_0 - y'_0)e^{k_- x}}{k - k_-} \\ &= -\lim_{k_- \to k}(-y_0 e^{kx} + (ky_0 - y'_0)xe^{k_- x}) \\ &= -(-y_0 e^{kx} + (ky_0 - y'_0)xe^{kx}) \end{aligned} \tag{7.265}$$

alias

$$y = ((y'_0 - ky_0)x + y_0)e^{kx}. \tag{7.266}$$

7.37 Persamaan Diferensial Eksak

Andaikan $x, y \in \mathbb{R}$, $y \mapsto x$, $y' := dy/dx$, dan $M, N \mapsto (x, y)$.

Persamaan diferensial

$$M\,dx + N\,dy = 0 \quad \text{alias} \quad M + Ny' = 0 \tag{7.267}$$

dikatakan *eksak* apabila terdapat $F \mapsto (x, y)$ sedemikian

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M \quad \text{dan} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N. \tag{7.268}$$

Apabila persamaan (7.267) merupakan persamaan diferensial eksak, maka persamaan tersebut dapat dituliskan

$$dF/dx = 0 \quad \text{alias} \quad F = F_x(0). \tag{7.269}$$

Penyelesaian persamaan (7.268) adalah

$$F = F_{x,y}(0, y) + \int_0^x M\,\partial x = F_{x,y}(x, 0) + \int_0^y N\,\partial y \tag{7.270}$$

alias

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{7.271}$$

yang merupakan syarat agar persamaan (7.267) eksak.

Dari persamaan (7.268), (7.270), dan (7.271), diperoleh

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d}{dy}F_{x,y}(0, y) + \int_0^x \frac{\partial M}{\partial y}\partial x = N \tag{7.272}$$

alias

$$\frac{d}{dy}F_{x,y}(0, y) + \int_0^x \frac{\partial N}{\partial x}\partial x = N \tag{7.273}$$

alias

$$\frac{d}{dy}F_{x,y}(0, y) - N_{x,y}(0, y) = 0 \tag{7.274}$$

alias

$$F_{x,y}(0, y) = F_{x,y}(0, 0) + \int_0^y N_{x,y}(0, y)dy. \tag{7.275}$$

Substitusi persamaan (7.275) ke persamaan (7.270) menghasilkan

$$F = F_{x,y}(0, 0) + \int_0^y N_{x,y}(0, y)dy + \int_0^x M\,\partial x \tag{7.276}$$

yang merupakan penyelesaian dari persamaan (7.268).

Substitusi persamaan (7.276) ke persamaan (7.269) menghasilkan

$$\int_0^y N_{x,y}(0,y)dy + \int_0^x M\,\partial x = F_x(0) - F_{x,y}(0,0) \tag{7.277}$$

yang merupakan penyelesaian dari persamaan (7.267).

7.38 Persamaan Diferensial Tak Eksak

Apabila persamaan (7.271) tidak dipenuhi, maka persamaan (7.267) disebut *persamaan diferensial tak eksak*.

Agar supaya persamaan (7.267) menjadi persamaan diferensial eksak, maka kedua ruas dari persamaan (7.267) harus dikalikan dengan *faktor integral* $u \mapsto (x,y)$, sehingga

$$uM\,dx + uN\,dy = 0 \tag{7.278}$$

yang akan dipaksa menjadi eksak.

Oleh karena itu, dari persamaan (7.278), haruslah berlaku

$$\frac{\partial(uM)}{\partial y} = \frac{\partial(uN)}{\partial x} \tag{7.279}$$

alias

$$\frac{\partial u}{\partial y}M + u\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}N + u\frac{\partial N}{\partial x} \tag{7.280}$$

alias

$$u = \frac{N\partial u/\partial x - M\partial u/\partial y}{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}. \tag{7.281}$$

Apabila ternyata u hanya bergantung pada x saja, maka tentu saja $\partial u/\partial x = du/dx$ dan $\partial u/\partial y = 0$, sehingga persamaan (7.281) menjadi

$$u = \frac{N}{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}\frac{du}{dx} \tag{7.282}$$

alias

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}dx = \frac{du}{u} \tag{7.283}$$

alias

$$\int_0^x \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}dx = \ln\frac{u}{u_0} \tag{7.284}$$

alias

$$u = u_0 \exp\int_0^x \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}dx. \tag{7.285}$$

Sekali lagi, peubah u pada persamaan (7.285) harus bergantung pada x saja. Apabila u tersebut masih bergantung pada y juga, maka u yang diperoleh dari persamaan (7.285) bukanlah faktor integral sebagaimana dimaksud sebelumnya, sehingga persamaan (7.278) gagal dijadikan persamaan diferensial eksak.

7.39 Mencari Penyelesaian Singular dari Persamaan Diferensial

Andaikan ada sebuah persamaan diferensial, yaitu

$$y = px + 2p^2 \tag{7.286}$$

di mana $x, y \in \mathbb{R}$, $p := dy/dx$, dan y bergantung pada x.

Primitif dari persamaan diferensial tersebut tentu saja adalah

$$y = Cx + 2C^2 \tag{7.287}$$

di mana $C \in \mathbb{R}$ adalah sebuah tetapan sebarang.

Ternyata, primitif tersebut adalah lokus dari keluarga garis-garis singgung pada sebuah kurva yang akan kita cari kemudian.

Untuk mencari lokus dari kurva tersebut, mula-mula, kita misalkan $C := kx_0$ di mana $k \in \mathbb{R}$ adalah tetapan yang hendak kita cari, dan $x_0 \in \mathbb{R}$ adalah absis dari titik singgung garis tersebut pada kurva yang hendak kita cari kemudian, sehingga

$$y = kx_0x + 2k^2x_0^2. \tag{7.288}$$

Apabila kedua ruas persamaan terakhir ditambah dengan $y_0 \in \mathbb{R}$ yang merupakan ordinat dari titik singgung tersebut, maka

$$y + y_0 = kx_0x + (y_0 + 2k^2x_0^2). \tag{7.289}$$

Tentu saja, lokus dari kurva tersebut adalah

$$2y = kx^2 + (y_0 + 2k^2x_0^2) \tag{7.290}$$

alias

$$2y - kx^2 = y_0 + 2k^2x_0^2 = m \tag{7.291}$$

di mana $m \in \mathbb{R}$ adalah tetapan yang hendak dicari kemudian.

Kita dapat menuliskan

$$y = (m + kx^2)/2 \tag{7.292}$$

dan

$$y_0 = m - 2k^2x_0^2 \tag{7.293}$$

sehingga

$$y_0 = (m + kx_0^2)/2. \tag{7.294}$$

Oleh karena itu,

$$m - 2k^2x_0^2 = (m + kx_0^2)/2. \tag{7.295}$$

Dengan menyamakan koefisien dari 1 dan x_0^2, maka diperoleh $m = m/2$ dan $-2k^2 = k/2$, alias $m = 0$ dan $k = -1/4$ sehingga lokus dari kurva tersebut adalah

$$2y - kx^2 = m \tag{7.296}$$

alias

$$2y - (-1/4)x^2 = 0 \tag{7.297}$$

alias

$$x^2 + 8y = 0 \tag{7.298}$$

yang merupakan lokus dari kurva parabola.

7.40 Fungsi Peubah Kompleks

Ada sebuah bilangan imajiner $i \in \mathbb{C}$ yang memenuhi sifat $i^2 = -1$. Tentu saja, $i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$, dan $i^{4n+3} = -i$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$.

Apabila ada pemetaan $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, maka dengan bantuan deret Taylor, diperoleh

$$\begin{aligned} f(x_1, \cdots, x_n, i) &= \sum_{j_1,\cdots,j_n,k=0}^{\infty} \frac{1}{j_1! \cdots j_n! k!} f_{j_1 \cdots j_n k}(0) x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n} i^k \\ &= \sum_{j_1,\cdots,j_n=0}^{\infty} \frac{x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}}{j_1! \cdots j_n!} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(\frac{f_{j_1 \cdots j_n (4k)}(0)}{(4k)!} - \frac{f_{j_1 \cdots j_n (4k+2)}(0)}{(4k+2)!} \right) \right. \\ &\quad \left. + i \left(\frac{f_{j_1 \cdots j_n (4k+1)}(0)}{(4k+1)!} - \frac{f_{j_1 \cdots j_n (4k+3)}(0)}{(4k+3)!} \right) \right) \end{aligned} \tag{7.299}$$

di mana

$$f_{j_1,\cdots,j_n,k}(X_1, \cdots, X_n, Y) := \lim_{x_1 \to X_1} \cdots \lim_{x_n \to X_n} \lim_{y \to Y} \frac{\partial^{j_1 + \cdots + j_n + k} f(x_1, \cdots, x_n, y)}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_n^{j_n} \partial y^k}. \tag{7.300}$$

Dari persamaan (7.299), tampak bahwa $f(x_1, \cdots, x_n, i)$ dapat dinyatakan dalam bentuk $u + iv$, di mana $u, v \in \mathbb{R}$, yaitu bahwa $u := \operatorname{Re} f(x_1, \cdots, x_n, i)$ dan $v := \operatorname{Im} f(x_1, \cdots, x_n, i)$ berturut-turut adalah bagian riil dan imajiner dari $f(x_1, \cdots, x_n, i)$.

Andaikan ada sebuah bilangan kompleks $z \in \mathbb{C}$. Apabila pada persamaan (7.299), $n = 2$ serta $x := x_1 := \operatorname{Re} z$ dan $y := x_2 := \operatorname{Im} z$, maka $f(x, y, i) = u + iv = f(z) =: w$, di mana $u, v \mapsto (x, y)$, sedemikian $u := \operatorname{Re} f(z)$ dan $v := \operatorname{Im} f(z)$, serta kali ini $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Fungsi $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dikatakan *analitik* / *reguler* / *holomorfis* / *monogenik* pada suatu daerah $A \subseteq \mathbb{C}$, di mana $\dim A = \dim \mathbb{C}$, apabila f memiliki turunan yang tunggal di setiap titik pada daerah A tersebut.

Apabila fungsi f tersebut analitik pada daerah A tersebut, maka pada daerah A berlaku

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dw}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dw}{dz} \tag{7.301}$$

serta

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{dw}{dz} \frac{\partial z}{\partial y} = i \frac{dw}{dz}. \tag{7.302}$$

Dari persamaan (7.301) dan (7.302), diperoleh

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \tag{7.303}$$

sehingga

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \tag{7.304}$$

yang merupakan akibat dari ke-analitik-an f di A.

Apabila f analitik di A, maka

$$\begin{aligned}\oint_{\partial A} f(z)\,dz &= \oint_{\partial A}(u+iv)(dx+i\,dy) = \oint_{\partial A}(u\,dx - v\,dy) + i\oint_{\partial A}(v\,dx+u\,dy) \\ &= -\int_A\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx\wedge dy + i\int_A\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\wedge dy = 0 \quad (7.305)\end{aligned}$$

akibat persamaan (7.304).

Apabila $f : \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ analitik di $A\subseteq\mathbb{C}$ di mana $\dim A = \dim\mathbb{C}$, serta $a\in A$, maka

$$\oint_{\partial A}\frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i f(a). \quad (7.306)$$

Dengan menurunkan kedua ruas persamaan (7.306) terhadap a sebanyak $n-1$ kali, diperoleh

$$\oint_{\partial A}\frac{f(z)}{(z-a)^n}dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a). \quad (7.307)$$

Dengan memasukkan $f(z)=1$ ke dalam persamaan (7.307), diperoleh

$$\oint_{\partial A}\frac{dz}{(z-a)^n} = 2\pi i\,\delta_{1n}. \quad (7.308)$$

Titik $a\in\mathbb{C}$ disebut *kutub* tingkat-n menurut fungsi $f : \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ apabila $f(z)$ dapat dinyatakan sebagai

$$f(z) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j(z-a)^j + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{b_j}{(z-a)^j} \quad (7.309)$$

di mana $a_0, a_j, b_j\in\mathbb{C}$ adalah konstanta, sedemikian rupa sehingga $n\in\mathbb{N}$ adalah nilai terbesar yang memenuhi $b_n\neq 0$.

Apabila pada wilayah $A\subseteq\mathbb{C}$, di mana $\dim A = \dim\mathbb{C}$, terdapat p buah kutub, yaitu $a_1,\cdots,a_p\in\mathbb{C}$, maka

$$f(z) = a_{0k} + \sum_{j=1}^{\infty} a_{jk}(z-a_k)^j + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{b_{jk}}{(z-a_k)^j} \quad (7.310)$$

untuk setiap $j\in\{1,\cdots,p\}$. Apabila $a_j\in A_j\subset A$ adalah satu-satunya kutub di wilayah A_j, maka tentu saja

$$\begin{aligned}\oint_{\partial A} f(z)\,dz &= \sum_{k=1}^{p}\oint_{\partial A_k} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{p} b_{jk}\sum_{j=1}^{\infty}\oint_{\partial A_k}\frac{dz}{(z-a_k)^j} \\ &= 2\pi i\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{\infty} b_{jk}\delta_{1j} = 2\pi i\sum_{k=1}^{p} b_{1k} = 2\pi i\sum_{k=1}^{p} R(f,a_k) \quad (7.311)\end{aligned}$$

di mana $b_{1k} := R(f,a_k)$ disebut sebagai *residu* fungsi f di titik a_k.

Untuk memperoleh nilai b_{1k}, dapat dilakukan prosedur sebagai berikut.

Dari persamaan (7.310), apabila a_k adalah kutub tingkat-n menurut fungsi f, maka untuk setiap $m \in \mathbb{N}_0$ yang memenuhi $m \geq n$, berlaku

$$(z-a_k)^m f(z) = a_{0k}(z-a_k)^m + \sum_{j=1}^{\infty} a_{jk}(z-a_k)^{j+m} + \sum_{j=1}^{\infty} b_{jk}(z-a_k)^{m-j} \tag{7.312}$$

lalu

$$\begin{aligned} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-a_k)^m f(z)\right) &= m!a_{0k}(z-a_k) + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(j+m)!}{(j+1)!}a_{jk}(z-a_k)^{j+1} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(m-j)!}{(1-j)!}b_{jk}(z-a_k)^{1-j} \end{aligned} \tag{7.313}$$

lalu

$$\begin{aligned} \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-a_k)^m f(z)\right) &= ma_{0k}(z-a_k) + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(j+m)!}{(j+1)!(m-1)!}a_{jk}(z-a_k)^{j+1} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(m-j)!}{(1-j)!(m-1)!}b_{jk}(z-a_k)^{1-j} \end{aligned} \tag{7.314}$$

lalu

$$\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a_k}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-a_k)^m f(z)\right) = b_{1k}, \tag{7.315}$$

sehingga persamaan (7.311) menjadi

$$\oint_{\partial A} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(m_k-1)!}\lim_{z\to a_k}\frac{d^{m_k-1}}{dz^{m_k-1}}\left((z-a_k)^{m_k} f(z)\right) \tag{7.316}$$

di mana $m_k \in \mathbb{N}_0$ yang memenuhi $m_k \geq n$ untuk setiap $k \in \{1,\cdots,p\}$.

7.41 Invers Transformasi Laplace

Transformasi Laplace $L : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{C})$ didefinisikan sedemikian

$$(L(f))(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{7.317}$$

di mana $\operatorname{Re} s > 0$.

Apabila $L(f) =: F$, maka $f = L^{-1}(F)$, sehingga untuk mendapatkan invers dari L, dapat dilakukan pengintegralan kedua ruas persamaan terakhir, yaitu

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st'}ds = \int_0^\infty f(t)\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{s(t'-t)}ds\,dt \tag{7.318}$$

di mana c adalah sebarang konstanta riil, serta integrasi s menelusuri lintasan garis lurus.

Apabila $\operatorname{Im} s =: y$, maka $s := c + iy$, sehingga

$$\begin{aligned}
\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st'}ds &= i\int_0^\infty f(t)\int_{-\infty}^\infty e^{(c+iy)(t'-t)}dy\,dt \\
&= i\int_0^\infty f(t)e^{c(t'-t)}\int_{-\infty}^\infty e^{iy(t'-t)}dy\,dt \\
&= 2\pi i\int_0^\infty f(t)e^{c(t'-t)}\delta(t'-t)\,dt \\
&= 2\pi i\int_{-\infty}^\infty u(t)f(t)e^{c(t'-t)}\delta(t'-t)\,dt \\
&= 2\pi i\,u(t')f(t') \qquad (7.319)
\end{aligned}$$

di mana $\delta : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ adalah delta Dirac 1-dimensi, serta $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi undak satuan Heaviside.

Oleh karena itu, dengan penggantian peubah boneka (*dummy variable*), diperoleh

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st}ds = 2\pi i\,u(t)f(t). \qquad (7.320)$$

Karena nilai t hanya dibatasi positif ($t > 0$), maka

$$f(t) = (L^{-1}(F))(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st}ds \qquad (7.321)$$

yang biasa dikenal sebagai *Integral Bromwich*.

7.42 Memampatkan Fungsi

Sebuah fungsi itu dapat dimampatkan. Sebagai contoh, fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, yang didefinisikan oleh $f(x) := \tanh kx$. Apabila fungsi ini dimampatkan di titik 0, maka fungsi ini menjadi $\operatorname{sgn} x := \lim_{k\to\infty} \tanh kx$ yang merupakan fungsi tanda (signatur) yang nilainya sama dengan 1 untuk $x > 0$, 0 untuk $x = 0$, dan -1 untuk $x < 0$. Selanjutnya, kita dapat mendefinisikan fungsi undak satuan Heaviside, yaitu fungsi $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, yang didefinisikan sebagai $u(x) = (1 + \operatorname{sgn} x)/2$, yang nilainya 1 untuk $x > 0$, 1/2 untuk $x = 0$, dan 0 untuk $x < 0$. Fungsi undak satuan Heaviside ini adalah pemampatan dari fungsi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, yang didefinisikan sebagai $g(x) := \frac{1}{2}(1 + \tanh kx)$ dengan mengambil limit $k \to \infty$. Dapat dibuktikan bahwa $\operatorname{sgn} x = 2u(x) - 1$.

Contoh selanjutnya adalah 'fungsi' delta Dirac, yaitu $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, yang didefinisikan sebagai turunan pertama dari fungsi undak satuan Heaviside, yaitu bahwa $\delta(x) = du(x)/dx$, yang merupakan pemampatan dari fungsi $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, yang didefinisikan sebagai $h(x) = \frac{1}{2}k\operatorname{sech}^2 kx$ dengan mengambil limit $k \to \infty$.

Contoh selanjutnya adalah fungsi turunan pertama dari delta Dirac, yaitu $\delta' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, yang didefinisikan sebagai $\delta'(x) := d\delta(x)/dx$. Di titik $x = 0$, tampak bahwa fungsi δ' ini mengalami fluktuatif naik-turun secara sangat cepat sekali, bahkan kita tidak dapat melihatnya. Sungguh menakjubkan! Inilah salah satu contoh fungsi-fungsi misterius.

Contoh selanjutnya, adalah fungsi $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, yang didefinisikan sebagai $p(x) := e^{-kx^2}$, yang apabila dimampatkan menjadi fungsi, katakanlah, $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, yaitu $P(x) := \lim_{k\to\infty} e^{-kx^2}$, yang nilainya 1 untuk $x = 0$ dan 0 untuk $x \neq 0$. Secara serupa, juga misalkan ada fungsi $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, yaitu $q(x) := \sin kx/(kx)$, yang apabila dimampatkan di titik 0 menjadi fungsi, katakanlah $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, yaitu $Q(x) := \lim_{k\to\infty} \sin kx/(kx)$ yang nilainya 1 untuk $x = 0$ dan 0 untuk $x \neq 0$.

Fungsi-fungsi yang telah dimampatkan ini diperoleh dari wakilannya, yaitu fungsi-fungsi yang belum dimampatkan. Tentunya sebuah fungsi mampat memiliki wakilan fungsi tak-mampat-nya yang tidak tunggal. Fungsi-fungsi mampat ini biasanya memiliki sifat-sifat yang khas, misalnya $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-y)dx = f(y)$ dan $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x-y)dx = -f'(y)$ di mana f' adalah turunan pertama dari fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wakilah fungsi tak-mampat ini semata-mata berguna untuk melihat fluktuasi fungsi-fungsi mampat yang terjadi di titik mampatnya.

7.43 Bentuk Eksplisit dari Anggota Grup $\mathrm{SL}(2, F)$

Himpunan semua matriks 2×2 yang setiap unsurnya merupakan anggota dari lapangan F dinyatakan sebagai $ML(2, F)$. Grup $\mathrm{SL}(2, F)$ didefinisikan sebagai

$$\mathrm{SL}(2, F) := \{A \in ML(2, F) \mid \det A = 1\}. \tag{7.322}$$

Misalkan anggota $\mathrm{SL}(2, F)$ dinyatakan sebagai

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, F). \tag{7.323}$$

Karena $\det A = 1$, maka

$$ad - bc = 1. \tag{7.324}$$

Karena $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ untuk setiap $u \in F$, maka haruslah

$$ad = \cosh^2 u \quad \text{dan} \quad bc = \sinh^2 u \tag{7.325}$$

sehingga (misalnya)

$$d = a^{-1}\cosh^2 u \quad \text{dan} \quad c = b^{-1}\sinh^2 u. \tag{7.326}$$

Oleh karena itu, bentuk eksplisit dari anggota $\mathrm{SL}(2, F)$ adalah

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b^{-1}\sinh^2 u & a^{-1}\cosh^2 u \end{pmatrix}. \tag{7.327}$$

Jadi, grup $\mathrm{SL}(2, F)$ ini berdimensi $3 \dim F$.

7.44 Semua Anggota Grup O(2) dan SO(2)

Grup O(2) adalah himpunan semua matriks riil A berlarik 2×2 yang memiliki invers sedemikian $A^{\mathsf{T}}A = 1$ disertai perkalian matriks biasa. Sedangkan grup SO(2) adalah himpunan semua matriks anggota grup O(2) yang memiliki nilai determinan 1.

Semua anggota grup O(2) secara eksplisit adalah matriks

$$A := \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -(-1)^n \sin\alpha & (-1)^n \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{7.328}$$

untuk semua $n \in \mathbb{Z}$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.

Semua anggota grup SO(2) secara eksplisit adalah matriks

$$A := \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{7.329}$$

untuk semua $\alpha \in \mathbb{R}$.

Matriks-matriks anggota grup O(2) merupakan matriks rotasi atau pencerminan di $\mathbb{R}^2$ yang memiliki nilai determinan 1 atau -1, sedangkan matriks-matriks anggota grup SO(2) merupakan matriks rotasi di $\mathbb{R}^2$ yang memiliki nilai determinan 1.

Sebuah titik $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ yang dicerminkan secara aktif oleh garis lurus $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x \tan\alpha\}$, di mana $\alpha \in \mathbb{R}$, akan mengalami transformasi ke titik $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ sedemikian

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{7.330}$$

Inilah bentuk eksplisit dari matriks pencerminan di $\mathbb{R}^2$.

7.45 Semua Anggota Grup U(2) dan SU(2)

Grup U(2) adalah himpunan semua matriks kompleks A berlarik 2×2 yang memiliki invers sedemikian $A^{\dagger}A = 1$ disertai perkalian matriks biasa. Sedangkan grup SU(2) adalah himpunan semua matriks anggota grup U(2) yang memiliki determinan 1.

Semua anggota grup U(2) secara eksplisit adalah matriks

$$A := \begin{pmatrix} e^{i\gamma} \cos\alpha & e^{i\beta} \sin\alpha \\ -e^{i(\eta-\beta)}(-1)^p \sin\alpha & e^{i(\eta-\gamma)}(-1)^p \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{7.331}$$

untuk semua $p \in \mathbb{Z}$ dan $\alpha, \beta, \gamma, \eta \in \mathbb{R}$.

Semua anggota grup SU(2) secara eksplisit adalah matriks

$$A := \begin{pmatrix} e^{i\gamma} \cos\alpha & e^{i\beta} \sin\alpha \\ -e^{-i\beta} \sin\alpha & e^{-i\gamma} \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{7.332}$$

untuk semua $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

7.46 Semua Anggota Grup SO(3)

Apabila sebuah titik $\vec{r} := (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ dirotasikan secara aktif oleh suatu vektor sudut rotasi $\vec{\theta} := \theta\hat{\theta}$ yang berpangkal di titik $\vec{0} := (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$, di mana $\hat{\theta} := (n_1, n_2, n_3)$ adalah vektor satuan arah sudut rotasi, dan $\theta := |\vec{\theta}|$ adalah besar sudut rotasi, maka titik $\vec{r}$ tersebut akan mengalami transformasi ke titik $\vec{r}' := (x'_1, x'_2, x'_3) \in \mathbb{R}^3$, sedemikian rupa sehingga

$$\begin{aligned} \vec{r}' = x'_j\hat{x}_j &= (\hat{\theta}\cdot\vec{r})\hat{\theta} + (\hat{\theta}\times\vec{r})\times\hat{\theta}\cos\theta + \hat{\theta}\times\vec{r}\sin\theta \\ &= (\hat{\theta}\cdot\vec{r})\hat{\theta} + \left(\vec{r} - (\hat{\theta}\cdot\vec{r})\hat{\theta}\right)\cos\theta + \hat{\theta}\times\vec{r}\sin\theta \\ &= (1-\cos\theta)(\hat{\theta}\cdot\vec{r})\hat{\theta} + \vec{r}\cos\theta + \hat{\theta}\times\vec{r}\sin\theta \\ &= (1-\cos\theta)n_k x_k n_j\hat{x}_j + x_j\hat{x}_j\cos\theta + \epsilon_{jkl}\hat{x}_j n_k x_l\sin\theta. \end{aligned} \tag{7.333}$$

Ini berarti

$$\begin{aligned} x'_j &= (1-\cos\theta)n_k x_k n_j + x_j\cos\theta + \epsilon_{jkl}n_k x_l\sin\theta \\ &= \left((1-\cos\theta)n_l n_j + \delta_{jl}\cos\theta + \epsilon_{jkl}n_k\sin\theta\right)x_l \\ &= R_{jl}x_l \end{aligned} \tag{7.334}$$

sehingga

$$R_{jl} := (1-\cos\theta)n_l n_j + \delta_{jl}\cos\theta + \epsilon_{jkl}n_k\sin\theta \tag{7.335}$$

untuk semua $j, l \in \{1,2,3\}$. Ternyata, matriks rotasi $R \in \mathrm{SO}(3)$ dengan kesembilan unsur yang didefinisikan pada persamaan (7.335) untuk setiap $\theta \in \mathbb{R}$ sedemikian $n_j n_j = 1$ ini membentuk grup SO(3), dengan sifat $R^{\mathrm{T}}R = 1$ alias $R_{jl}R_{jm} = \delta_{lm}$, dan $\det R = 1$.

7.47 Rotasi Pasif di Ruang $\mathbb{R}^3$

Di ruang $\mathbb{R}^3$, ada sebuah vektor $\vec{A} := A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$ yang berpangkal di titik $(0,0,0)$ yang mengalami rotasi pasif menjadi vektor $\vec{A}' := A'_x\hat{x}' + A'_y\hat{y}' + A'_z\hat{z}'$ akibat vektor sudut rotasi $\vec{\theta} := \theta\hat{n} \in \mathbb{R}^3$ yang berpangkal di titik $(0,0,0)$, di mana $\theta \in \mathbb{R}$ adalah sudut rotasi, dan $\hat{n} \in \mathbb{R}^3$ adalah vektor satuan arah sumbu rotasi. Di sini, $\hat{x} := (1,0,0)$, $\hat{y} := (0,1,0)$, dan $\hat{z} := (0,0,1)$ adalah anggota-anggota basis alamiah ortonormal, serta

$$\hat{x}' := \hat{x}\cdot\hat{n}\hat{n} + (\hat{n}\times\hat{x})\times\hat{n}\cos\theta + \hat{n}\times\hat{x}\sin\theta, \tag{7.336}$$

$$\hat{y}' := \hat{y}\cdot\hat{n}\hat{n} + (\hat{n}\times\hat{y})\times\hat{n}\cos\theta + \hat{n}\times\hat{y}\sin\theta, \tag{7.337}$$

$$\hat{z}' := \hat{z}\cdot\hat{n}\hat{n} + (\hat{n}\times\hat{z})\times\hat{n}\cos\theta + \hat{n}\times\hat{z}\sin\theta \tag{7.338}$$

adalah vektor-vektor satuan akibat rotasi dari $\hat{x}$, $\hat{y}$, dan $\hat{z}$ oleh $\vec{\theta}$. Tentu saja, $\vec{A}' = \vec{A}$ alias

$$A'_x\hat{x}' + A'_y\hat{y}' + A'_z\hat{z}' = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z} \tag{7.339}$$

sehingga

$$A'_x = \hat{x}'\cdot\hat{x}A_x + \hat{x}'\cdot\hat{y}A_y + \hat{x}'\cdot\hat{z}A_z, \tag{7.340}$$

$$A'_y = \hat{y}' \cdot \hat{x} A_x + \hat{y}' \cdot \hat{y} A_y + \hat{y}' \cdot \hat{z} A_z, \tag{7.341}$$

$$A'_z = \hat{z}' \cdot \hat{x} A_x + \hat{z}' \cdot \hat{y} A_y + \hat{z}' \cdot \hat{z} A_z. \tag{7.342}$$

Dalam bentuk matriks, ketiga persamaan terakhir menjadi

$$\begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}' \cdot \hat{x} & \hat{x}' \cdot \hat{y} & \hat{x}' \cdot \hat{z} \\ \hat{y}' \cdot \hat{x} & \hat{y}' \cdot \hat{y} & \hat{y}' \cdot \hat{z} \\ \hat{z}' \cdot \hat{x} & \hat{z}' \cdot \hat{y} & \hat{z}' \cdot \hat{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}. \tag{7.343}$$

Dengan demikian, diperoleh ketiga komponen vektor $\vec{A}$ dalam basis ortonormal yang baru akibat rotasi oleh $\vec{\theta}$.

7.48 Bentuk Eksplisit dari Semua Anggota Grup U(2) dan SU(2)

Grup U(2) berisi semua matriks kompleks 2×2 yang memiliki invers disertai operasi perkalian matriks biasa yang memenuhi kaitan $AA^\dagger = 1$ untuk semua $A \in \mathrm{U}(2)$ di mana 1 adalah matriks identitas perkalian matriks biasa. Grup SU(2) berisi semua anggota grup U(2) yang memiliki determinan 1.

Matriks A tersebut dapat dituliskan sebagai

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{7.344}$$

di mana a, b, c, d adalah bilangan-bilangan kompleks.

Dari kaitan $AA^\dagger = 1$, kita peroleh

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.345}$$

sehingga $|a|^2 + |b|^2 = 1$, $|c|^2 + |d|^2 = 1$, dan $ac^* + bd^* = 0$. Melalui proses parameterisasi, kita peroleh $a = e^{i\alpha} \cos\beta$, $b = e^{i\gamma} \sin\beta$, $c = e^{i\delta} \cos\epsilon$, dan $d = e^{i\phi} \sin\epsilon$ untuk semua $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \phi \in \mathbb{R}$.

Dari kaitan $ac^* + bd^* = 0$, kita peroleh

$$e^{i(\alpha-\delta)} \cos\beta \cos\epsilon + e^{i(\gamma-\phi)} \sin\beta \sin\epsilon = 0. \tag{7.346}$$

Tentu saja, haruslah dipenuhi $\alpha - \delta = \gamma - \phi$ alias $\alpha + \phi = \gamma + \delta = \eta \in \mathbb{R}$, sehingga $\delta = \eta - \gamma$ dan $\phi = \eta - \alpha$. Oleh karena itu, kita peroleh

$$\cos\beta \cos\epsilon + \sin\beta \sin\epsilon = 0 \tag{7.347}$$

alias

$$\cos(\beta - \epsilon) = 0 \tag{7.348}$$

alias

$$\epsilon = \beta + (2n+1)\pi/2 \tag{7.349}$$

untuk semua $n \in \mathbb{Z}$, sehingga $\cos\epsilon = -(-1)^n \sin\beta = \mp \sin\beta$ dan $\sin\beta = (-1)^n \cos\beta = \pm \cos\beta$.

Jadi, bentuk eksplisit dari semua anggota dari grup U(2) adalah

$$A = \begin{pmatrix} e^{i\alpha}\cos\beta & e^{i\gamma}\sin\beta \\ \mp e^{i(\eta-\gamma)}\sin\beta & \pm e^{i(\eta-\alpha)}\cos\beta \end{pmatrix} \in \mathrm{U}(2) \tag{7.350}$$

untuk semua $\alpha, \beta, \gamma, \eta \in \mathbb{R}$. Grup U(2) ini memiliki empat buah parameter riil.

Sekarang, kita hendak mencari bentuk eksplisit dari semua anggota grup SU(2). Karena

$$\begin{vmatrix} e^{i\alpha}\cos\beta & e^{i\gamma}\sin\beta \\ \mp e^{i(\eta-\gamma)}\sin\beta & \pm e^{i(\eta-\alpha)}\cos\beta \end{vmatrix} = 1, \tag{7.351}$$

maka

$$\pm e^{i\eta}\cos^2\beta \pm e^{i\eta}\sin^2\beta = 1 \tag{7.352}$$

alias $\pm e^{i\eta} = 1$ alias $\pm 1 = 1$ dan $\eta = 2n\pi$, sehingga

$$A = \begin{pmatrix} e^{i\alpha}\cos\beta & e^{i\gamma}\sin\beta \\ -e^{-i\gamma}\sin\beta & e^{-i\alpha}\cos\beta \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2) \tag{7.353}$$

untuk semua $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Grup SU(2) ini memiliki tiga buah parameter riil.

7.49 Cacah Parameter Riil dari Beberapa Grup Lie

Kita mengenal grup matriks ML(n, F) yang berisi semua matriks $n \times n$ yang unsur-unsurnya merupakan anggota dari suatu lapangan F, yang dapat berupa $\mathbb{R}$ maupun $\mathbb{C}$. Dari grup ini, kita dapat membangun grup linier umum, yaitu

$$\mathrm{GL}(n, F) := \{A \in \mathrm{ML}(n, F) \mid \det A \neq 0\}. \tag{7.354}$$

Kemudian, kita dapat membangun grup ortogonal, yaitu

$$\mathrm{O}(n) := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid AA^\mathrm{T} = 1\} \tag{7.355}$$

di mana 1 adalah matriks identitas di $GL(n, F)$.

Selanjutnya, kita dapat membangun grup ortogonal khusus, yaitu

$$\mathrm{SO}(n) := \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \det A = 1\}. \tag{7.356}$$

Demikian pula, kita dapat membangun grup uniter, yaitu

$$\mathrm{U}(n) := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \mid AA^\dagger = 1\}. \tag{7.357}$$

Lalu, kita dapat membangun grup uniter khusus, yaitu

$$\mathrm{SU}(n) := \{A \in \mathrm{U}(n) \mid \det A = 1\}. \tag{7.358}$$

Grup-grup tersebut merupakan contoh dari grup kontinyu alias grup Lie yang dapat memiliki parameter riil.

Andaikan didefinisikan bahwa cacah parameter riil dari grup Lie G adalah $N(G) \in \mathbb{N}_0$.

Untuk menghitung cacah dari parameter riil dari grup $\mathrm{O}(n)$, misalnya, maka kita tuliskan

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ji}A_{ki} = \delta_{jk} \tag{7.359}$$

untuk semua $j,k \in \{1,\cdots,n\}$, dengan $A_{ij} \in \mathbb{R}$ untuk setiap $i,j \in \{1,\cdots,n\}$, di mana δ_{jk} adalah delta Kronecker.

Matriks $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ memiliki n^2 buah unsur.

Untuk $j = k$, terdapat n buah persamaan riil sebagai kendala.

Untuk $j \neq k$, terdapat $(n^2 - n)/2 = n(n-1)/2$ buah persamaan riil sebagai kendala.

Jadi, $N(\mathrm{O}(n)) = n^2 - (n + n(n-1)/2) = n(n-1)/2$.

Secara serupa $N(\mathrm{SO}(n)) = N(\mathrm{O}(n)) = n(n-1)/2$ karena tambahan syarat $\det A = 1$ sama sekali tidak mengurangi cacah parameter riil.

Untuk menghitung cacah parameter riil dari grup $\mathrm{U}(n)$, misalnya, maka kita tuliskan

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ji}A^*_{ki} = \delta_{jk} \tag{7.360}$$

untuk semua $j,k \in \{1,\cdots,n\}$, dengan $A_{ij} \in \mathbb{C}$ untuk setiap $i,j \in \{1,\cdots,n\}$.

Matriks $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ memiliki $2n^2$ buah unsur.

Untuk $j = k$, maka ternyata hanya terdapat n buah persamaan riil, bukan $2n$, sebagai kendala.

Untuk $j \neq k$, maka ternyata ada $2(n^2 - n)/2 = n^2 - n = n(n-1)$ buah persamaan riil sebagai kendala.

Jadi, $N(\mathrm{U}(n)) = 2n^2 - (n + n(n-1)) = n^2$.

Ternyata, tambahan syarat $\det A = 1$ untuk $A \in \mathrm{U}(n)$ hanya merupakan sebuah persamaan riil, sehingga $N(\mathrm{SU}(n)) = N(\mathrm{U}(n)) - 1 = n^2 - 1$.

7.50 Contoh Semigrup

Sebuah sistem aljabar $(A, *_1, *_2, \ldots, *_n)$ merupakan sebuah himpunan A yang dilengkapi dengan operasi biner $*_1, *_2, \ldots, *_n$. Sebuah operasi biner $*$ di A tersebut mengoperasikan dua buah anggota himpunan A sehingga menghasilkan sebuah anggota himpunan A juga. Apabila operasi biner $*$ tersebut asosiatif, yaitu bahwa $a * (b * c) = (a * b) * c$ untuk setiap a, b, c anggota A, maka sistem aljabar $(A, *)$ ini boleh dikatakan sebagai sebuah semigrup. Apabila semigrup $(A, *)$ tadi memiliki identitas kiri, yaitu $e_l \in A$ sedemikian $e_l * a = a$ untuk setiap $a \in A$, maka semigrup tersebut boleh dikatakan beridentitas kiri. Apabila semigrup $(A, *)$ memiliki identitas kanan, yaitu $e_r \in A$ sedemikian $a * e_r = a$ untuk setiap $a \in A$, maka semigrup tersebut boleh dikatakan beridentitas kanan. Apabila semigrup $(A, *)$ memiliki identitas kiri dan identitas kanan sekaligus (yang disebut sebagai identitas saja), yaitu $e \in A$ (yang dapat dibuktikan hanya tunggal), maka semigrup tersebut boleh dikatakan beridentitas. Apabila pada sebuah semigrup $(A, *)$ berlaku bahwa $b * a = a * b$ untuk setiap $a, b \in A$, maka semigrup ini boleh dikatakan komutatif (abelan). Apabila setiap a anggota himpunan A memiliki invers (kebalikan), yaitu $a^{-1} \in A$ sedemikian rupa $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$

di mana $e \in A$ merupakan identitas dari semigrup $(A, *)$, maka semigrup $(A, *)$ ini boleh dikatakan sebagai sebuah grup.

Contoh sebuah semigrup komutatif yang bukan merupakan sebuah grup adalah himpunan $C^\infty(\mathbb{R})$, yang berisi semua fungsi licin dari himpunan bilangan riil ke dirinya sendiri, disertai dengan operasi konvolusi $*$, yang didefinisikan sedemikian $(f*g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)ds$ untuk setiap $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$. Dengan pembuktian yang cukup, dapat ditunjukkan bahwa $g * f = f * g$ dan $f * (g * h) = (f * g) * h$ untuk setiap $f, g, h \in C^\infty(\mathbb{R})$, sehingga sistem aljabar $(C^\infty(\mathbb{R}), *)$ ini merupakan sebuah semigrup komutatif. Akan tetapi, semigrup ini konon bukanlah sebuah grup, sebab, untuk sementara ini diketahui bahwa semigrup ini tidak beridentitas dan tidak setiap unsurnya memiliki invers.

7.51 Pendiagonalan Matriks Persegi

Andaikan ada matriks persegi $n \times n$ yang unsur-unsurnya adalah anggota lapangan F, yaitu $A \in ML(n, F)$. Swa-nilai dari matriks A tersebut misalnya adalah $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in F$ yang memenuhi

$$\det(A - \lambda_i 1) = 0 \tag{7.361}$$

untuk setiap $i \in \{1, \cdots, n\}$, di mana $1 \in ML(n, F)$ adalah matriks identitas. Swa-vektor dari A relatif terhadap swa-nilai λ_i adalah $v_i \in ML(n \times 1, F)$ yang memenuhi persamaan

$$Av_i = \lambda_i v_i \tag{7.362}$$

untuk setiap $i \in \{1, \cdots, n\}$. Andaikan ada matriks persegi $S \in ML(n, F)$ yang kolom ke-i-nya berisikan unsur-unsur dari matriks kolom v_i. Andaikan ada matriks diagonal $D \in ML(n, F)$ yang unsur ke-ii-nya merupakan λ_i. Oleh karena itu, diperoleh kesamaan

$$AS = SD \quad \text{alias} \quad S^{-1}AS = D \tag{7.363}$$

apabila S memiliki invers. Dengan demikian pendiagonalan matriks A oleh matriks S menghasilkan matriks D.

7.52 Invers dalam Grup Konvolusi

Konvolusi antara dua buah fungsi $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ didefinisikan sedemikian

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)ds. \tag{7.364}$$

Transformasi Fourier $F : C(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ didefinisikan sedemikian

$$(F(f))(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt. \tag{7.365}$$

Himpunan semua fungsi $f, g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ disertai operasi konvolusi ternyata membentuk sebuah grup, yaitu grup konvolusi. Ternyata, terdapat sebuah isomorfisme, yaitu $\sqrt{2\pi}F$, dari grup konvolusi fungsi ke grup perkalian fungsi sedemikian $F(f * g) = \sqrt{2\pi}F(f)F(g)$.

Dalam grup konvolusi fungsi, terdapat sebuah unsur identitas, yaitu delta Dirac δ, yang salah satunya didefinisikan sedemikian $\delta(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}dk$. Apabila fungsi f dan g saling invers dalam grup konvolusi ini, maka haruslah $f * g = \delta$. Apabila kedua ruas persamaan terakhir ini dikenai transformasi Fourier F, maka terjadilah $F(f * g) = F(\delta)$ alias $\sqrt{2\pi}F(f)F(g) = 1_f/\sqrt{2\pi}$ alias $g = (1/2\pi)F^{-1}(1_f/F(f))$, sehingga

$$\begin{aligned}
(f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\left(\frac{1}{2\pi}F^{-1}\left(\frac{1_f}{F(f)}\right)\right)(s)ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1_f}{F(f)}\right)(u)e^{-isu}du\,ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-isu}}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(w)e^{iuw}dw}du\,ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)e^{-isu}ds}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(w)e^{iuw}dw}du. \qquad (7.366)
\end{aligned}$$

Apabila $t - s = \alpha$ dengan t konstan relatif, maka $ds = -d\alpha$ dan $e^{-isu} = e^{-i(t-\alpha)u}$. sehingga

$$\begin{aligned}
(f * g)(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)e^{i\alpha u}d\alpha}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(w)e^{iuw}dw}e^{-iut}du \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iut}du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}du = \delta(t). \qquad (7.367)
\end{aligned}$$

Jadi, dalam grup konvolusi fungsi, invers dari fungsi f adalah $(1/2\pi)F^{-1}(1_f/F(f))$.

7.53 Hubungan Basis Kontravarian dengan Basis Kovarian Konstan

Andaikan $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\} \subset \mathbb{R}^3$ adalah basis kontravarian yang konstan, sehingga

$$\vec{e}_x := \frac{\partial\vec{r}}{\partial q^x} = \left(\frac{\partial x}{\partial q^x}, \frac{\partial y}{\partial q^x}, \frac{\partial z}{\partial q^x}\right) = (e_{xx}, e_{xy}, e_{xz}), \qquad (7.368)$$

$$\vec{e}_y := \frac{\partial\vec{r}}{\partial q^y} = \left(\frac{\partial x}{\partial q^y}, \frac{\partial y}{\partial q^y}, \frac{\partial z}{\partial q^y}\right) = (e_{yx}, e_{yy}, e_{yz}), \qquad (7.369)$$

$$\vec{e}_z := \frac{\partial\vec{r}}{\partial q^z} = \left(\frac{\partial x}{\partial q^z}, \frac{\partial y}{\partial q^z}, \frac{\partial z}{\partial q^z}\right) = (e_{zx}, e_{zy}, e_{zz}). \qquad (7.370)$$

Di sini, $\vec{r} := (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ adalah vektor posisi yang bergantung pada koordinat umum $q^x, q^y, q^z \in \mathbb{R}$, serta $e_{ij} \in \mathbb{R}$ adalah tetapan untuk setiap $i, j \in \{x, y, z\}$.

Penyelesaian persamaan (7.368), (7.369), dan (7.370) adalah

$$x = e_{xx}q^x + e_{yx}q^y + e_{zx}q^z + C_x, \tag{7.371}$$

$$y = e_{xy}q^x + e_{yy}q^y + e_{zy}q^z + C_y, \tag{7.372}$$

$$z = e_{xz}q^x + e_{yz}q^y + e_{zz}q^z + C_z, \tag{7.373}$$

di mana $C_x, C_y, C_z \in \mathbb{R}$ adalah tetapan.

Penyajian matriks dari tiga persamaan terakhir adalah

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{yx} & e_{zx} \\ e_{xy} & e_{yy} & e_{zy} \\ e_{xz} & e_{yz} & e_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^x \\ q^y \\ q^z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} \tag{7.374}$$

alias

$$\begin{pmatrix} x - C_x \\ y - C_y \\ z - C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{yx} & e_{zx} \\ e_{xy} & e_{yy} & e_{zy} \\ e_{xz} & e_{yz} & e_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^x \\ q^y \\ q^z \end{pmatrix}. \tag{7.375}$$

Dengan mendefinisikan

$$D := \begin{vmatrix} e_{xx} & e_{yx} & e_{zx} \\ e_{xy} & e_{yy} & e_{zy} \\ e_{xz} & e_{yz} & e_{zz} \end{vmatrix}, \qquad D_x := \begin{vmatrix} x - C_x & e_{yx} & e_{zx} \\ y - C_y & e_{yy} & e_{zy} \\ z - C_z & e_{yz} & e_{zz} \end{vmatrix}, \tag{7.376}$$

$$D_y := \begin{vmatrix} e_{xx} & x - C_x & e_{zx} \\ e_{xy} & y - C_y & e_{zy} \\ e_{xz} & z - C_z & e_{zz} \end{vmatrix}, \qquad D_z := \begin{vmatrix} e_{xx} & e_{yx} & x - C_x \\ e_{xy} & e_{yy} & y - C_y \\ e_{xz} & e_{yz} & z - C_z \end{vmatrix}, \tag{7.377}$$

maka melalui aturan Cramer, diperoleh

$$q^x = D_x/D, \qquad q^y = D_y/D, \qquad \text{dan} \qquad q^z = D_z/D, \tag{7.378}$$

sehingga

$$\vec{e}^x := \nabla q^x = \left(\frac{\partial q^x}{\partial x}, \frac{\partial q^x}{\partial y}, \frac{\partial q^x}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{D_x}{D} \right), \tag{7.379}$$

$$\vec{e}^y := \nabla q^y = \left(\frac{\partial q^y}{\partial x}, \frac{\partial q^y}{\partial y}, \frac{\partial q^y}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{D_y}{D} \right), \tag{7.380}$$

$$\vec{e}^z := \nabla q^z = \left(\frac{\partial q^z}{\partial x}, \frac{\partial q^z}{\partial y}, \frac{\partial q^z}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{D_z}{D} \right). \tag{7.381}$$

Bentuk eksplisit dari ketiga persamaan terakhir adalah

$$\vec{e}^x = \frac{\vec{e}_y \times \vec{e}_z}{\vec{e}_x \cdot (\vec{e}_y \times \vec{e}_z)}, \qquad \vec{e}^y = \frac{\vec{e}_z \times \vec{e}_x}{\vec{e}_y \cdot (\vec{e}_z \times \vec{e}_x)}, \qquad \vec{e}^z = \frac{\vec{e}_x \times \vec{e}_y}{\vec{e}_z \cdot (\vec{e}_x \times \vec{e}_y)}. \tag{7.382}$$

Dari persamaan terakhir, diperoleh kaitan $\vec{e}^i \cdot \vec{e}_j = \delta^i{}_j$ untuk setiap $i, j \in \{x, y, z\}$.

7.54 Sistem Koordinat Umum

Dalam ruang $\mathbb{R}^n$, vektor posisi dinyatakan sebagai $\vec{r} := (x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ yang bergantung pada seperangkat koordinat umum adalah $q^1, \cdots, q^n \in \mathbb{R}$.

Dengan menggunakan kesepakatan penjumlahan Einstein, andaikan ada sebuah vektor $\vec{A} := A^j \vec{e}_j \in \mathbb{R}^n$, di mana $A^j := \vec{A} \cdot \vec{e}^j \in \mathbb{R}$ untuk semua $j \in \{1, \cdots, n\}$ adalah komponen kontravarian dari vektor $\vec{A}$, $\vec{e}_j := \partial \vec{r} / \partial q^j$ adalah anggota basis kontravarian, dan $\vec{e}^j := \nabla q^j$ adalah anggota basis kovarian.

Komponen tensor metrik kovarian didefinisikan sebagai $g_{ij} := \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$. Komponen tensor kontravarian didefinisikan sebagai $g^{ij} := \vec{e}^i \cdot \vec{e}^j$.

Lambang Christoffel Γ didefinisikan sedemikian

$$\frac{\partial \vec{e}_j}{\partial q^k} = \Gamma^i{}_{jk} \vec{e}_i \tag{7.383}$$

sehingga

$$\Gamma^i{}_{jk} = \vec{e}^i \cdot \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial q^k}. \tag{7.384}$$

Karena $\vec{e}^i \cdot \vec{e}_j = \delta^i{}_j$, maka dengan menurunkan kedua ruas persamaan terakhir dengan q^k, diperoleh

$$\frac{\partial \vec{e}^i}{\partial q^k} \cdot \vec{e}_j + \vec{e}^i \cdot (\Gamma^l{}_{jk} \vec{e}_l) = 0 \tag{7.385}$$

alias

$$\frac{\partial \vec{e}^i}{\partial q^k} \cdot \vec{e}_j + \Gamma^i{}_{jk} = 0 \tag{7.386}$$

alias

$$\frac{\partial \vec{e}^i}{\partial q^k} \cdot \vec{e}_j = -\Gamma^i{}_{jk} \tag{7.387}$$

alias

$$\frac{\partial \vec{e}^i}{\partial q^k} = -\Gamma^i{}_{jk} \vec{e}^j. \tag{7.388}$$

Demikian pula, ada sifat $\Gamma^i{}_{kj} = \Gamma^i{}_{jk}$.

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{A}}{\partial q^j} &= \frac{\partial (A^i \vec{e}_i)}{\partial q^j} = \frac{\partial A^i}{\partial q^j} \vec{e}_i + A^i \Gamma^k{}_{ij} \vec{e}_k \\ &= \left(\frac{\partial A^k}{\partial q^j} + A^i \Gamma^k{}_{ij} \right) \vec{e}_k =: \frac{D A^k}{\partial q^j} \vec{e}_k \end{aligned} \tag{7.389}$$

di mana didefinisikan

$$\frac{D A^k}{\partial q^j} := \frac{\partial A^k}{\partial q^j} + A^i \Gamma^k{}_{ij} \tag{7.390}$$

yang merupakan turunan kovarian.

Apabila $\varphi \in \mathbb{R}$ adalah sebuah skalar yang bergantung pada seperangkat koordinat umum tadi, maka

$$\nabla\varphi = \hat{x}^j \frac{\partial\varphi}{\partial x^j} \tag{7.391}$$

di mana

$$\hat{x}^j = \hat{x}_j := (\underbrace{0, \cdots, 0, \overset{j}{1}, 0, \cdots, 0}_{n}) \tag{7.392}$$

sehingga

$$\nabla\varphi = \hat{x}^j \frac{\partial q^k}{\partial x^j}\frac{\partial\varphi}{\partial q^k} = \vec{e}^k \frac{\partial\varphi}{\partial q^k}. \tag{7.393}$$

Divergensi dari $\vec{A}$ tentu saja adalah

$$\nabla\cdot\vec{A} = \vec{e}^i \cdot \frac{\partial}{\partial q^i}(A^j\vec{e}_j) = \vec{e}^i \cdot \left(\frac{DA^j}{\partial q^i}\vec{e}_j\right) = \frac{DA^i}{\partial q^i}. \tag{7.394}$$

Rotasi dari $\vec{A}$ tentu saja adalah

$$\nabla\times\vec{A} = \vec{e}^i \times \frac{\partial}{\partial q^i}(A^j\vec{e}_j) = \frac{DA^j}{\partial q^i}\vec{e}^i \times \vec{e}_j. \tag{7.395}$$

Laplacian dari φ tentu saja adalah

$$\begin{aligned}\nabla^2\varphi &= \vec{e}^i \cdot \frac{\partial}{\partial q^i}\left(\vec{e}^j \frac{\partial}{\partial q^j}\right)\varphi \\ &= \vec{e}^i \cdot \left(-\Gamma^j{}_{ik}\vec{e}^k \frac{\partial}{\partial q^j} + \vec{e}^j \frac{\partial^2}{\partial q^i \partial q^j}\right)\varphi \\ &= g^{ij}\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^i\partial q^j} - \Gamma^j{}_{ik} g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial q^j}. \end{aligned} \tag{7.396}$$

Laplacian dari $\vec{A}$ tentu saja adalah

$$\begin{aligned}\nabla^2\vec{A} &= \left(g^{ij}\frac{\partial^2}{\partial q^i\partial q^j} - \Gamma^j{}_{ik} g^{ik}\frac{\partial}{\partial q^j}\right)(A^l\vec{e}_l) \\ &= \left(g^{ij}\frac{D^2A^l}{\partial q^i\partial q^j} - \Gamma^j{}_{ik} g^{ik}\frac{DA^l}{\partial q^j}\right)\vec{e}_l. \end{aligned} \tag{7.397}$$

7.55 Persamaan Geodesik

Penggal jarak dalam ruang melengkung dapat dinyatakan sebagai ds sedemikian rupa sehingga

$$ds^2 = g_{ij}dq^i dq^j, \tag{7.398}$$

di mana g_{ij} adalah komponen metrik, serta q^i adalah koordinat umum, sehingga variasi dari persamaan (7.398) adalah $2ds\delta ds = \delta g_{ij}dq^i dq^j + g_{ij}dq^j\delta dq^i + g_{ij}dq^i\delta dq^j$.

Jarak antara dua buah titik pada ruang melengkung didefinisikan sebagai $s_{21} := s_2 - s_1 = \int_{s_1}^{s_2} ds$. Agar supaya jarak tersebut menjadi stasioner, maka variasi dari s_{21} harus sama dengan nol, yaitu bahwa $\delta s_{21} = 0$ alias $\delta \int_{s_1}^{s_2} ds = 0$ alias $\int_{s_1}^{s_2} \delta ds = 0$. Tentu saja,

$$\delta ds = \frac{1}{2}\left(\delta g_{ij}\frac{dq^i}{ds}\frac{dq^j}{ds} + g_{ij}\frac{dq^j}{ds}\delta\frac{dq^i}{ds} + g_{ij}\frac{dq^i}{ds}\delta\frac{dq^j}{ds}\right) ds. \tag{7.399}$$

Kita tentu tahu bahwa

$$\delta g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\delta q^k, \tag{7.400}$$

sehingga

$$\begin{aligned}\delta ds &= \frac{1}{2}\left(\delta g_{ij}\frac{dq^i}{ds}\frac{dq^j}{ds} + \frac{d}{ds}\left(g_{ij}\frac{dq^i}{ds}\delta q^i\right) - \frac{d}{ds}\left(g_{ij}\frac{dq^j}{ds}\right)\delta q^i\right.\\ &\quad \left. + \frac{d}{ds}\left(g_{ij}\frac{dq^i}{ds}\delta q^j\right) - \frac{d}{ds}\left(g_{ij}\frac{dq^i}{ds}\right)\delta q^j\right) ds. \end{aligned} \tag{7.401}$$

Andaikan $(\delta q^i)_s(s_1) = (\delta q^i)_s(s_2) = 0$ maka pengintegralan pada persamaan (7.401) menghasilkan

$$\begin{aligned}\int_{s_1}^{s_2} \delta ds &= \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\frac{dq^i}{ds}\frac{dq^j}{ds} - \frac{d}{ds}\left(g_{kj}\frac{dq^j}{ds} + g_{ik}\frac{dq^i}{ds}\right)\right)\delta q^k ds\\ &= \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2}\left(\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}\right)\frac{dq^i}{ds}\frac{dq^j}{ds} - 2g_{ik}\frac{d^2q^i}{ds^2}\right)\delta q^k ds = 0.\end{aligned}$$

Karena δq^k itu saling bebas, maka integran pada persamaan terakhir ini haruslah nol, yaitu bahwa

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}\right)\frac{dq^i}{ds}\frac{dq^j}{ds} - g_{ik}\frac{d^2q^i}{ds^2} = 0. \tag{7.402}$$

Apabila kedua ruas persamaan terakhir ini dikalikan dengan g^{kl}, maka diperoleh kaitan

$$\boxed{\frac{d^2q^l}{ds^2} + \Gamma^l{}_{ij}\frac{dq^i}{ds}\frac{dq^j}{ds} = 0} \tag{7.403}$$

di mana

$$\boxed{\Gamma^l{}_{ij} := \frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\right)} \tag{7.404}$$

adalah lambang Christoffel alias koneksi Levi-Civita yang bebas torsi. Persamaan (7.403) merupakan persamaan geodesik yang mengatur hubungan antara koordinat-koordinat umum q^i dengan parameter jarak s. Dari persamaan (7.398), diperoleh kaitan

$$ds^2 = g_{ij}\frac{dq^i}{ds}\frac{dq^j}{ds}ds^2 \tag{7.405}$$

sehingga haruslah

$$\boxed{g_{ij}\frac{dq^i}{ds}\frac{dq^j}{ds}=1.} \tag{7.406}$$

Jadi, persamaan geodesik (7.403) harus disertai persamaan (7.406).

7.56 Kuarternion dalam Bentuk Polar

Diketahui perkalian antara anggota basis kuarternion i, j, k sebagai berikut, yaitu $ij = -ji = k$, $ki = -ik = j$, $jk = -kj = i$, dan $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Sebuah kuarternion riil $q := q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 \in \mathbb{H}_\mathbb{R}$ dapat dinyatakan dalam bentuk polar, yaitu bahwa $q = |q|e^{u\Theta} = |q|(\cos\Theta + u\sin\Theta)$, di mana $u^2 = -1$, $\Theta \in \mathbb{R}$ dan

$$|q| = \sqrt{q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2}, \tag{7.407}$$

sehingga $q_0 = |q|\cos\Theta$ dan $iq_1 + jq_2 + kq_3 = u|q|\sin\Theta$. Dari sini, kita peroleh

$$u := (iq_1+jq_2+kq_3)/\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2} \tag{7.408}$$

di mana $q_1 = r\sin\theta\cos\phi$, $q_2 = r\sin\theta\sin\phi$, dan $q_3 = r\cos\theta$, sehingga

$$r := \sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}, \tag{7.409}$$

$\theta := \arctan_2(q_3, \sqrt{q_1^2+q_2^2})$, $\phi := \arctan_2(q_1, q_2)$, dan $\Theta := \arctan_2(q_0, \sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2})$, sehingga $u = i\sin\theta\cos\phi + j\sin\theta\sin\phi + k\cos\theta$ dan $r := |q|\sin\Theta$.

7.57 Relasi Kontinyuitas antar-Objek Geometris

Pada kesempatan ini, saya hendak memperkenalkan relasi kontinyuitas antar-objek geometris.

Kita telah mengetahui relasi ekuivalen, yaitu $\sim$, pada himpunan S, yang memiliki sifat reflektif ($a \sim a$), simetris (jika $a \sim b$ maka $b \sim a$), dan transitif (jika $a \sim b$ dan $b \sim c$, maka $a \sim c$).

Di sini, akan dipilih relasi ekuivalen kontinyuitas $\sim$ antara dua buah ruang topologis (objek geometris), yaitu bahwa $A \sim B$ apabila terdapat sedikitnya sebuah pemetaan bijektif yang kontinyu dari ruang topologis A ke ruang topologis B atau dari ruang topologis B ke ruang topologis A, di mana invers dari pemetaan tersebut tidak harus kontinyu.

Saya akan memperkenalkan sebuah operasi penjumlahan $+$ untuk dua buah ruang topologis, yaitu bahwa

$$A + B := (A \times \{b\}) \cup (\{a\} \times B) \tag{7.410}$$

sedemikian $A \cap \{a\} = \varnothing$ atau $B \cap \{b\} = \varnothing$. Dengan demikian, $B + A \sim A + B$.

Selanjutnya didefinisikan perkalian sebuah ruang topologis A dengan bilangan asli n, yaitu

$$nA := A_1 + \cdots + A_n \tag{7.411}$$

di mana $A_1 = \cdots = A_n = A$.

Selanjutnya didefinisikan perkalian antara dua ruang topologis, yaitu $AB := A \times B$, dan pangkat dari ruang topologis, yaitu $A^n := A_1 \times \cdots \times A_n$ di mana $A_1 = \cdots = A_n = A$.

Dengan demikian, $BA \sim AB$, $A + \varnothing \sim A$, $A\{0\} \sim A$, dan $A\varnothing \sim \varnothing$. Di sini, $\varnothing$ adalah himpunan kosong.

Didefinisikan sebuah lingkaran atau permukaan bola $S^n := \{(x_0, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$, sebuah cakram $D^n := \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$, dan sebuah torus $T^n := (S^1)^n$.

Terdapat beberapa teorema, yaitu $\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \sim \mathbb{Z}$, $n\mathbb{Z} \sim \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^n \sim \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} + \{0\} \sim \mathbb{Z}$, $\mathbb{R} + \{0\} \sim S^1$, $2\mathbb{R} + \{0\} \sim \mathbb{R}$, $(n+1)\mathbb{R} + n\{0\} \sim \mathbb{R}$, $2\mathbb{R}^2 + \mathbb{R} \sim \mathbb{R}^2$, $2\mathbb{R}^3 + \mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n + \{0\} \sim S^n$, dan $\mathbb{R}^n + S^{n-1} \sim D^n$.

Ada pula teorema yang tidak disangka-sangka, misalnya $D^2 \sim \mathbb{R}^2$ dan $T^2 \sim S^1\mathbb{R}$. Pembuktiannya adalah sebagai berikut.

$D^2 \sim \mathbb{R}^2 + S^1 \sim \mathbb{R}^2 + \mathbb{R} + \{0\} \sim 2\mathbb{R}^2 + 2\mathbb{R} + \{0\} \sim 2\mathbb{R}^2 + \mathbb{R} \sim \mathbb{R}^2$.

$T^2 = (S^1)^2 \sim (\mathbb{R} + \{0\})^2 \sim \mathbb{R}^2 + 2\mathbb{R} + \{0\} \sim \mathbb{R}^2 + \mathbb{R} \sim \mathbb{R}(\mathbb{R} + \{0\}) \sim \mathbb{R}S^1 \sim S^1\mathbb{R}$.

Teori ini belum mapan dan masih dalam tahap perkembangan.

7.58 Bentangan Sejumlah Vektor

Bentangan dari m buah vektor di ruang $\mathbb{R}^n$ itu merupakan sebuah lokus (tempat kedudukan) manifold linier berdimensi q yang dibentang oleh m buah vektor tersebut yang merupakan himpunan bagian dari atau sama dengan $\mathbb{R}^n$, yang dengan kata lain adalah $q \leq n$.

Andaikan ada m buah vektor di ruang $\mathbb{R}^n$, yaitu $\vec{a}_i := \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j$ (dengan $a_{ij} \in \mathbb{R}$) untuk setiap $i \in \{1, \cdots, m\}$, di mana

$$\hat{x}_j := (\underbrace{0, \cdots, 0, \overset{j}{1}, 0, \cdots, 0}_{n}) \tag{7.412}$$

Misalnya, didefinisikan multipel produk skalar dari k buah vektor di ruang $\mathbb{R}^k$, yaitu

$$[\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_k] := \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{k1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1k} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}. \tag{7.413}$$

Misalkan pula didefinisikan multipel produk skalar dari k buah vektor di ruang $\mathbb{R}^p$ di mana $p > k$, yaitu

$$[\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_k] := \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{k1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1k} & \cdots & b_{kk} \end{vmatrix} \tag{7.414}$$

di mana $b_{ij} \in \mathbb{R}$ dipilih dari a_{ij} sedemikian $j \in \{1, \cdots, p\}$ untuk semua pemilihan.

Andaikan ada sebuah vektor posisi $\vec{r} := (x_1, \cdots, x_n)$ dengan $x_i \in \mathbb{R}$ untuk semua $i \in \{1, \cdots, n\}$.

Bentangan dari $\{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n\}$ dinyatakan sebagai $\mathrm{Span}\{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n\}$.

Mula-mula, andaikan $m = n$.

Apabila $[\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n] \neq 0$, maka Span$\{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n\} = \mathbb{R}^n$.
Apabila $[\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n] = 0$, maka

$$\text{Span}\{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n\} = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^n \mid [\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_{n-1}, \vec{r}] = 0\} \tag{7.415}$$

dengan $\vec{b}_i \in \{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n\}$ yang berbeda satu sama lain untuk setiap $i \in \{1, \cdots, n-1\}$.

Apabila $[\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_{n-1}, \vec{r}] = 0$, maka

$$\text{Span}\{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n\} = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^n \mid [\vec{c}_1, \cdots, \vec{c}_{n-2}, \vec{r}] = 0\} \tag{7.416}$$

dengan $\vec{c}_i \in \{\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_{n-1}\}$ yang berbeda satu sama lain untuk setiap $i \in \{1, \cdots, n-2\}$.

Proses ini berlangsung hingga seterusnya.

Andaikan sekarang, $m > n$.

Apabila terdapat $\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_n \in \{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m\}$ yang berbeda satu sama lain yang memenuhi $[\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_n] \neq 0$, maka Span$\{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m\} = \mathbb{R}^n$.

Apabila semua $\vec{b}_1, \cdots \vec{b}_n \in \{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m\}$ yang berbeda satu sama lain memenuhi $[\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_n] = 0$, maka

$$\text{Span}\{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m\} = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^n \mid [\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_{n-1}, \vec{r}] = 0\} \tag{7.417}$$

dengan $\vec{b}_i \in \{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m\}$ yang berbeda satu sama lain untuk setiap $i \in \{1, \cdots, n-1\}$.

Proses ini berlangsung hingga seterusnya seperti pada kasus $m = n$.

Sekarang, andaikan $m = n - 1$.

$$\text{Span}\{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m\} = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^n \mid [\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_{n-1}, \vec{r}] = 0\} \tag{7.418}$$

asalkan $[\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_{n-1}, \vec{r}] \neq 0$.

Proses ini berlangsung hingga seterusnya seperti pada kasus $m = n$.

Andaikan $m = n - 2$ atau $m = n - 3$ atau seterusnya, maka prosesnya serupa seperti pada kasus $m = n$.

7.59 Wakilan Vektor Singgung dan Vektor Normal dari Sebuah Permukaan

Andaikan di ruang $\mathbb{R}^3$ ada sebuah permukaan

$$S(\varphi) := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(\vec{r}) = 0\} \tag{7.419}$$

di mana $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ adalah sebuah pemetaan kontinyu. Tentu saja, posisi sebuah titik pada $S(\varphi)$ adalah $\vec{r} := (x, y, z) \in S(\varphi)$ yang bergantung pada dua buah koordinat umum sebagai parameter dari $S(\varphi)$, misalnya $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Kita akan membuktikan bahwa $\partial\vec{r}/\partial\alpha$ adalah sebuah vektor singgung di titik $\vec{r}$, sedangkan $\nabla\varphi(\vec{r})$ adalah sebuah vektor normal di titik $\vec{r}$. Karena $\varphi(\vec{r}) = 0$, maka tentu saja $\partial\varphi(\vec{r})/\partial\alpha = 0$, sehingga

$$\frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial\alpha} = \frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\alpha} + \frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\alpha} + \frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\alpha} = 0 \tag{7.420}$$

alias

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \cdot \nabla \varphi(\vec{r}) = 0. \quad (7.421)$$

Tampak bahwa pada persamaan terakhir, $\partial\vec{r}/\partial\alpha$ dan $\nabla\varphi(\vec{r})$ saling tegak lurus, sehingga $\partial\vec{r}/\partial\alpha$ merupakan salah satu vektor singgung pada $S(\varphi)$ di titik $\vec{r}$, sedangkan $\nabla\varphi(\vec{r})$ adalah salah satu vektor normal pada $S(\varphi)$ di titik $\vec{r}$.

7.60 Cara Menentukan Ruang Vektor Singgung pada Sebuah Manifold

Andaikan ada sebuah manifold berdimensi n yang terbenam di ruang $\mathbb{R}^m$ (di mana $n < m$), yaitu

$$M := \{p := f(q_1, \cdots, q_n) \in \mathbb{R}^m \mid q_1, \cdots, q_n \in \mathbb{R}\} \quad (7.422)$$

di mana $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ adalah sebuah fungsi licin.

Ruang vektor singgung pada manifold M di titik $p \in M$ tentu saja adalah

$$T_pM := \{p + \sum_{j=1}^{n} x_j \partial p/\partial q_j \mid x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\} \quad (7.423)$$

di mana $q_1, \cdots, q_n \in \mathbb{R}$ adalah n buah parameter riil milik manifold M.

7.61 Bentuk Eksplisit dari Koefisien Struktur dari Sebuah Basis Ruang Vektor Singgung pada Sebuah Manifold

Misalkan ada sebuah basis di titik $p := \vec{r} \in M \subseteq \mathbb{R}^n$ yang bergantung pada koordinat $(q^1, \cdots, q^m) \in \mathbb{R}^m$ pada sebuah manifold M berdimensi $m \leq n$ yang tidak harus merupakan basis koordinat, yaitu

$$B := \{\vec{c}_1, \cdots, \vec{c}_m\} \quad (7.424)$$

di mana $\vec{c}_i := M^j{}_i \vec{e}_j$ untuk setiap $i \in \{1, \cdots, m\}$, dengan $M^j{}_i \in \mathbb{R}$ bergantung pada $(q^1, \cdots, q^m)$ untuk setiap $i, j \in \{1, \cdots, m\}$, serta $\vec{e}_j := \partial\vec{r}/\partial q^j$ adalah sebuah anggota basis koordinat untuk setiap $j \in \{1, \cdots, m\}$. Di sini, telah dipakai kesepakatan penjumlahan Einstein untuk indeks berulang, yaitu bahwa $a_{ii} := \sum_{i=1}^m a_{ii}$. Di sini didefinisikan $\vec{e}_i(Q) := \partial Q/\partial q^i$ untuk sebarang kuantitas Q.

Lantas, perkalian Lie dari $\vec{X}, \vec{Y} \in T_pM$ anggota ruang vektor singgung di titik $p \in M$ didefinisikan sebagai

$$[\vec{X}, \vec{Y}] := \vec{X}\vec{Y} - \vec{Y}\vec{X} \quad (7.425)$$

di mana $\vec{X} := X^i \vec{c}_i$ dan $\vec{Y} := Y^i \vec{c}_i$ dengan $X^i, Y^i \in \mathbb{R}$ bergantung pada $(q^1, \cdots, q^m)$ untuk setiap $i \in \{1, \cdots, m\}$, sehingga

$$\begin{aligned} [\vec{X}, \vec{Y}] &= X^i \vec{c}_i (Y^j \vec{c}_j) - Y^i \vec{c}_i (X^j \vec{c}_j) \\ &= [X^i \vec{c}_i (Y^j) - Y^i \vec{c}_i (X^j)] \vec{c}_j + X^i Y^j [\vec{c}_i, \vec{c}_j] \end{aligned} \quad (7.426)$$

sedemikian rupa sehingga

$$[\vec{c}_i, \vec{c}_j] = f^k{}_{ij}\vec{c}_k \tag{7.427}$$

di mana $f^k{}_{ij} \in \mathbb{R}$ adalah koefisien struktur yang secara umum bergantung pada $(q^1, \cdots, q^m)$ untuk setiap $i, j, k \in \{1, \cdots, m\}$. Oleh karena itu,

$$[M^a{}_i\vec{e}_a, M^b{}_j\vec{e}_b] = f^k{}_{ij}M^c{}_k\vec{e}_c \tag{7.428}$$

alias

$$(M^a{}_i\partial M^b{}_j/\partial q^a - M^a{}_j\partial M^b{}_i/\partial q^a)\vec{e}_b = f^k{}_{ij}M^c{}_k\vec{e}_c \tag{7.429}$$

karena $[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = \vec{0}$.

Apabila didefinisikan $\vec{e}^i := \nabla q^i$ untuk setiap $i \in \{1, \cdots, m\}$, maka tentu saja $\vec{e}^i \cdot \vec{e}_j = \delta^i{}_j$ untuk setiap $i, j \in \{1, \cdots, m\}$, sehingga

$$M^a{}_i\partial M^h{}_j/\partial q^a - M^a{}_j\partial M^h{}_i/\partial q^a = f^k{}_{ij}M^h{}_k. \tag{7.430}$$

Apabila didefinisikan $N^j{}_i \in \mathbb{R}$ sedemikian rupa sehingga $\vec{e}_i = N^j{}_i\vec{c}_j$, maka tentu saja

$$\vec{e}_i = N^j{}_iM^k{}_j\vec{e}_k \tag{7.431}$$

sehingga terpaksa $N^j{}_iM^k{}_j = \delta^k{}_i$. Oleh karena itu,

$$N^k{}_h(M^a{}_i\partial M^h{}_j/\partial q^a - M^a{}_j\partial M^h{}_i/\partial q^a) = f^k{}_{ij}. \tag{7.432}$$

Inilah bentuk eksplisit dari koefisien struktur $f^k{}_{ij}$.

7.62 Menalar Turunan Lie dengan Analisis Tensor Biasa

Andaikan $T := T^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\cdots\nu_n}e_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_m} \otimes e^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes e^{\nu_n}$ adalah sebuah tensor yang bergantung pada p buah koordinat umum, yaitu $x^1, \cdots, x^p \in \mathbb{R}$ sebagai p buah parameter bagi manifold M yang berdimensi p, serta $X := X^\lambda e_\lambda$ adalah sebuah vektor yang bergantung pada p buah koordinat umum tersebut juga. Selanjutnya, akan dicari turunan Lie dari T sepanjang X, yang didefinisikan sebagai

$$L_XT := \left(\lim_{\epsilon\to 0}\frac{T_x(x+\epsilon X) - T}{\epsilon}\right)_{\partial_\rho X=0} \tag{7.433}$$

untuk semua $\rho \in \{1, \cdots, p\}$, di mana $\partial_\rho := \partial/\partial x^\rho$.

Ternyata, pengolahan lebih lanjut dari persamaan terakhir, menghasilkan

$$L_XT = \left(X^\lambda\partial_\lambda T\right)_{\partial_\rho X=0}. \tag{7.434}$$

$$\begin{aligned} L_XT = (X^\lambda(\partial_\lambda T^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\cdots\nu_n}e_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_m} \otimes e^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes e^{\nu_n} \\ +T^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\cdots\nu_n}\sum_{s=1}^m e_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_{s-1}} \otimes \partial_\lambda e_{\mu_s} \otimes e_{\mu_{s+1}} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_m} \otimes e^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes e^{\nu_n} \\ +T^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\cdots\nu_n}e_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_m} \otimes \sum_{r=1}^n e^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes e^{\nu_{r-1}} \otimes \partial_\lambda e^{\nu_r} \otimes e^{\nu_{r+1}} \otimes \cdots \otimes e^{\nu_n}))_{\partial_\rho X=0}. \end{aligned}$$

Dengan memanfaatkan identitas $\partial_\alpha e_\beta = \Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} e_\gamma$ dan $\partial_\alpha e^\beta = -\Gamma^\beta{}_{\alpha\gamma} e^\gamma$, diperoleh

$$\begin{aligned}
L_X T &= (X^\lambda \partial_\lambda T^{\mu_1 \cdots \mu_m}{}_{\nu_1 \cdots \nu_n} e_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_m} \otimes e^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes e^{\nu_n} \\
&+ T^{\mu_1 \cdots \mu_m}{}_{\nu_1 \cdots \nu_n} X^\lambda \sum_{s=1}^{m} \Gamma^\sigma{}_{\lambda \mu_s} e_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_{s-1}} \otimes e_\sigma \otimes e_{\mu_{s+1}} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_m} \otimes e^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes e^{\nu_n} \\
&- T^{\mu_1 \cdots \mu_m}{}_{\nu_1 \cdots \nu_n} X^\lambda e_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_m} \otimes \sum_{r=1}^{n} \Gamma^{\nu_r}{}_{\lambda\tau} e^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes e^{\nu_{r-1}} \otimes e^\tau \otimes e^{\nu_{r+1}} \otimes \cdots \otimes e^{\nu_n})_{\partial_\rho X = 0}
\end{aligned}$$

di mana Γ adalah lambang Christoffel.

Dengan memanfaatkan identitas $\partial_\alpha X = D_\alpha X^\lambda e_\lambda$ di mana $D_\alpha X^\beta := \partial_\alpha X^\beta + X^\lambda \Gamma^\beta{}_{\alpha\lambda}$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
L_X T &= X^\lambda \partial_\lambda T^{\mu_1 \cdots \mu_m}{}_{\nu_1 \cdots \nu_n} e_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_m} \otimes e^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes e^{\nu_n} \\
&- T^{\mu_1 \cdots \mu_m}{}_{\nu_1 \cdots \nu_n} \sum_{s=1}^{m} \partial_{\mu_s} X^\sigma e_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_{s-1}} \otimes e_\sigma \otimes e_{\mu_{s+1}} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_m} \otimes e^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes e^{\nu_n} \\
&+ T^{\mu_1 \cdots \mu_m}{}_{\nu_1 \cdots \nu_n} e_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_m} \otimes \sum_{r=1}^{n} \partial_\tau X^{\nu_r} e^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes e^{\nu_{r-1}} \otimes e^\tau \otimes e^{\nu_{r+1}} \otimes \cdots \otimes e^{\nu_n}.
\end{aligned}$$

Dengan melakukan penukaran indeks boneka, akhirnya diperoleh bentuk eksplisit dari turunan Lie dari T sepanjang X, yaitu

$$\begin{aligned}
L_X T &= (X^\lambda \partial_\lambda T^{\mu_1 \cdots \mu_m}{}_{\nu_1 \cdots \nu_n} - \sum_{s=1}^{m} T^{\mu_1 \cdots \mu_{s-1} \sigma \mu_{s+1} \cdots \mu_m}{}_{\nu_1 \cdots \nu_n} \partial_\sigma X^{\mu_s} \\
&\quad + \sum_{r=1}^{n} T^{\mu_1 \cdots \mu_m}{}_{\nu_1 \cdots \nu_{r-1} \tau \nu_{r+1} \cdots \nu_n} \partial_{\nu_r} X^\tau) e_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_m} \otimes e^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes e^{\nu_n}.
\end{aligned}$$

7.63 Turunan Tingkat Pecahan

Biasanya, turunan (derivatif) dari sebuah fungsi riil $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ itu tingkatan turunannya selalu bilangan asli. Tetapi, pada kesempatan ini, saya hendak mendefinisikan turunan tingkat pecahan untuk fungsi f tersebut.

Dari kalkulus diferensial, kita telah mengetahui bahwa

$$\frac{d^j}{dx^j}(x^n) = \frac{n!}{(n-j)!} x^{n-j} \tag{7.435}$$

untuk setiap bilangan asli j dan n.

Kali ini kaitan ini akan diperumum untuk beberapa bilangan riil j dan n dengan menggunakan fungsi gamma Γ sedemikian $\Gamma(x) = (x-1)!$, yaitu bahwa

$$\frac{d^j}{dx^j}(x^n) = \frac{n!}{(n-j)!} x^{n-j} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-j+1)} x^{n-j}. \tag{7.436}$$

Dengan memperderet-Taylor-kan fungsi f tadi, kita peroleh

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \lim_{y \to 0} \frac{d^n f(y)}{dy^n} x^n \tag{7.437}$$

yang konvergen pada daerah tertentu. Turunan tingkat $j \in \mathbb{R}$ dari f tersebut, tentu saja adalah

$$\frac{d^j}{dx^j} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{y\to 0} \frac{d^n f(y)}{dy^n} \frac{1}{(n-j)!} x^{n-j}. \tag{7.438}$$

Sebagai contoh, kita akan menghitung $d^{1/2}x/dx^{1/2}$, yaitu bahwa

$$\frac{d^{1/2}x}{dx^{1/2}} = \frac{1!}{(1-1/2)!} x^{1-1/2} = \frac{1}{(1/2)!} x^{1/2}. \tag{7.439}$$

Karena $(1/2)! = \Gamma(3/2) = (1/2)\Gamma(1/2) = (1/2)\sqrt{\pi}$, maka

$$\frac{d^{1/2}x}{dx^{1/2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x}. \tag{7.440}$$

Sekarang, kita hendak menghitung turunan tingkat negatif, yang sudah seharusnya merupakan anti-derivatif (integral) dari fungsi tersebut. Contohnya adalah sebagai berikut.

$$\frac{d^{-1}(x^n)}{dx^{-1}} = \frac{n!}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \tag{7.441}$$

sesuai yang kita harapkan.

7.64 Fungsi Homogen Berderajat Sebarang

Diketahui ada kuantitas $f := \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{r} M_{i_1\cdots i_n} x_{i_1} \cdots x_{i_n}$, sehingga

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{i_1,\dots,i_n}^{r} \sum_{k=1}^{n} M_{i_1\cdots i_n} x_{i_1} \cdots x_{i_{k-1}} \delta_{ii_k} x_{i_{k+1}} \cdots x_{i_n}, \tag{7.442}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1,\dots,i_{k-1},i_{k+1},\dots,i_n=1}^{r} M_{i_1\cdots i_{k-1} i i_{k+1}\cdots i_n} x_{i_1} \cdots x_{i_{k-1}} x_{i_{k+1}} \cdots x_{i_n}, \tag{7.443}$$

$$\sum_{i=1}^{r} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i,i_1,\dots,i_{k-1},i_{k+1},\dots,i_n=1}^{r} M_{i_1\cdots i_{k-1} i i_{k+1}\cdots i_n} x_{i_1} \cdots x_{i_{k-1}} x_i x_{i_{k+1}} \cdots x_{i_n}. \tag{7.444}$$

Karena $M_{i_1\cdots i_{k-1} i i_{k+1}\cdots i_n} x_i = \sum_{i_k=1}^{r} \delta_{ii_k} M_{i_1\cdots i_{k-1} i_k i_{k+1}\cdots i_n} x_{i_k}$, maka

$$\sum_{i=1}^{r} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i,i_1,\dots,i_n=1}^{r} M_{i_1\cdots i_n} x_{i_1} \cdots x_{i_n} \delta_{ii_k}. \tag{7.445}$$

Karena $\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{r} \delta_{ii_k} = n$, maka

$$\sum_{i=1}^{r} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = nf. \tag{7.446}$$

7.65 Pertambahan Majemuk Kontinyu

Misalkan jumlah sesuatu pada saat t adalah $M(t)$ dan pada saat t_0 adalah $M_0 := M(t_0)$. Apabila pertambahan pada saat t adalah $I(t)$ dan laju pertambahannya adalah $J(t) := dI(t)/dt$, maka jumlah sesuatu pada saat $t_0 + n\Delta t$ adalah

$$M(t_0 + n\Delta t) = M_0 \prod_{j=0}^{n} [1 + J(t_0 + j\Delta t)\Delta t], \tag{7.447}$$

dengan Δt adalah selang waktu pertambahan.

Apabila dianggap $n = (t - t_0)/\Delta t$, maka

$$M(t) = M_0 \prod_{j=0}^{(t-t_0)/\Delta t} [1 + J(t_0 + j\Delta t)\Delta t], \tag{7.448}$$

$$M(t) = M_0 \prod_{j=0}^{(t-t_0)/\Delta t} \left\{[1 + J(t_0 + j\Delta t)\Delta t]^{1/[J(t_0+j\Delta t)\Delta t]}\right\}^{J(t_0+j\Delta t)\Delta t}. \tag{7.449}$$

Untuk $\Delta t \approx 0$, diperoleh

$$M(t) \approx M_0 \prod_{j=0}^{(t-t_0)/\Delta t} \exp[J(t_0 + j\Delta t)\Delta t] = M_0 \exp \sum_{j=0}^{(t-t_0)/\Delta t} J(t_0 + j\Delta t)\Delta t \tag{7.450}$$

sehingga

$$M(t) \approx M_0 \exp \int_{t_0}^{t} J(t)\, dt. \tag{7.451}$$

7.66 Perkalian Silang antara Dua Buah Vektor yang Tegak Lurus dengan Sebuah Vektor yang Lain

Andaikan untuk sebuah vektor $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$, didefinisikan $\vec{A}_{//} := \vec{A} \cdot \hat{V}\hat{V}$ dan $\vec{A}_{\perp} := \vec{A} - \vec{A}_{//}$, di mana $\hat{V} := \vec{V}/|\vec{V}|$ untuk setiap $\vec{V} \in \mathbb{R}^3$.

Untuk setiap $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, berlaku

$$(\vec{a}_{\perp} \times \vec{b}_{\perp})_{//} = (\vec{a}_{\perp} \times \vec{b}_{\perp}) \cdot \hat{V}\hat{V}. \tag{7.452}$$

Andaikan didefinisikan $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] := (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}$ untuk setiap $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$, sehingga

$$(\vec{a}_{\perp} \times \vec{b}_{\perp})_{//} = [\vec{a}_{\perp}, \vec{b}_{\perp}, \hat{V}]\hat{V}. \tag{7.453}$$

Ada teorema yang mengatakan bahwa

$$[\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}]\vec{s} = (\vec{p} \cdot \vec{s})(\vec{q} \times \vec{r}) + (\vec{q} \cdot \vec{s})(\vec{r} \times \vec{p}) + (\vec{r} \cdot \vec{s})(\vec{p} \times \vec{q}) \tag{7.454}$$

untuk setiap $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{s} \in \mathbb{R}^3$ sehingga

$$(\vec{a}_{\perp} \times \vec{b}_{\perp})_{//} = (\vec{a}_{\perp} \cdot \hat{V})(\vec{b}_{\perp} \times \hat{V}) + (\vec{b}_{\perp} \cdot \hat{V})(\hat{V} \times \vec{a}_{\perp}) + (\hat{V} \cdot \hat{V})(\vec{a}_{\perp} \times \vec{b}_{\perp}). \tag{7.455}$$

Karena $\vec{a}_{\perp} \cdot \hat{V} = \vec{b}_{\perp} \cdot \hat{V} = 0$ dan $\hat{V} \cdot \hat{V} = 1$, maka

$$(\vec{a}_{\perp} \times \vec{b}_{\perp})_{//} = \vec{a}_{\perp} \times \vec{b}_{\perp}. \tag{7.456}$$

Kesamaan terakhir ini sangat penting dalam perumusan transformasi Lorentz untuk medan elektromagnetik.

7.67 Gabungan dan Irisan dari Objek-Objek Geometris

Andaikan ada sebuah titik $P(\vec{r}) := \{\vec{r}\}$ di mana $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$.

Andaikan ada sebuah kurva $C(f,g) := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{r}) = g(\vec{r}) = 0\}$ di mana $f,g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ adalah dua buah pemetaan kontinyu.

Andaikan ada sebuah permukaan $S(f) := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{r}) = 0\}$ di mana $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ adalah sebuah pemetaan kontinyu.

Andaikan ada sebuah volume $V(f) := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{r}) < 0\}$ di mana $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ adalah sebuah pemetaan kontinyu.

Andaikan fungsi $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai $p(x) = 1$ untuk $x = 0$ dan $p(x) = 0$ untuk $x \neq 0$.

Andaikan fungsi $p^{(3)} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai $p^{(3)}(\vec{r}) = 1$ untuk $\vec{r} = \vec{0}$ dan $p^{(3)}(\vec{r}) = 0$ untuk $\vec{r} \neq \vec{0}$.

Andaikan fungsi $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di definisikan sebagai $u(x) = 1$ untuk $x > 0$, $u(x) = 1/2$ untuk $x = 0$, dan $u(x) = 0$ untuk $x < 0$.

Berikut ini adalah beberapa teorema mengenai gabungan dan irisan dari objek-objek geometris tersebut.

$$P(\vec{a}) \cap P(\vec{b}) = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid p^{(3)}(\vec{r}-\vec{a})p^{(3)}(\vec{r}-\vec{b}) = 1\}. \tag{7.457}$$

$$P(\vec{a}) \cup P(\vec{b}) = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid (1-p^{(3)}(\vec{r}-\vec{a}))(1-p^{(3)}(\vec{r}-\vec{b})) = 0\}. \tag{7.458}$$

$$P(\vec{a}) \cap C(f,g) = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid p^{(3)}(\vec{r}-\vec{a})p(f(\vec{r}))p(g(\vec{r})) = 1\}. \tag{7.459}$$

$$P(\vec{a}) \cup C(f,g) = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid (1-p^{(3)}(\vec{r}-\vec{a}))(1-p(f(\vec{r}))p(g(\vec{r}))) = 0\}. \tag{7.460}$$

$$P(\vec{a}) \cap S(f) = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid p^{(3)}(\vec{r}-\vec{a})p(f(\vec{r})) = 1\}. \tag{7.461}$$

$$P(\vec{a}) \cup S(f) = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid (1-p^{(3)}(\vec{r}-\vec{a}))(1-p(f(\vec{r}))) = 0\}. \tag{7.462}$$

$$P(\vec{a}) \cap V(f) = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid p^{(3)}(\vec{r}-\vec{a})u(-f(\vec{r})) = 1\}. \tag{7.463}$$

$$P(\vec{a}) \cup V(f) = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid (1-p^{(3)}(\vec{r}-\vec{a}))(1-u(-f(\vec{r}))) = 0\}. \tag{7.464}$$

$$C(f,g) \cap C(h,k) = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid p(f(\vec{r}))p(g(\vec{r}))p(h(\vec{r}))p(k(\vec{r})) = 1\}. \tag{7.465}$$

$$C(f,g) \cup C(h,k) = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid (1-p(f(\vec{r}))p(g(\vec{r})))(1-p(h(\vec{r}))p(k(\vec{r}))) = 0\}. \tag{7.466}$$

$$C(f,g) \cap S(h) = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid p(f(\vec{r}))p(g(\vec{r}))p(h(\vec{r})) = 1\}. \tag{7.467}$$

$$C(f,g) \cup S(h) = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid (1-p(f(\vec{r}))p(g(\vec{r})))(1-p(h(\vec{r}))) = 0\}. \tag{7.468}$$

$$C(f,g) \cap V(h) = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid p(f(\vec{r}))p(g(\vec{r}))u(-h(\vec{r})) = 1\}. \tag{7.469}$$

$$C(f,g) \cup V(h) = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid (1-p(f(\vec{r}))p(g(\vec{r})))(1-u(-h(\vec{r}))) = 0\}. \tag{7.470}$$

$$S(f) \cap S(g) = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid p(f(\vec{r}))p(g(\vec{r})) = 1\}. \tag{7.471}$$

$$S(f)\cup S(g)=\{\vec{r}\in\mathbb{R}^3 \mid (1-p(f(\vec{r})))(1-p(g(\vec{r})))=0\}. \tag{7.472}$$

$$S(f)\cap V(g)=\{\vec{r}\in\mathbb{R}^3 \mid p(f(\vec{r}))u(-g(\vec{r}))=1\}. \tag{7.473}$$

$$S(f)\cup V(g)=\{\vec{r}\in\mathbb{R}^3 \mid (1-p(f(\vec{r})))(1-u(-g(\vec{r})))=0\}. \tag{7.474}$$

$$V(f)\cap V(g)=\{\vec{r}\in\mathbb{R}^3 \mid u(-f(\vec{r}))u(-g(\vec{r}))=1\}. \tag{7.475}$$

$$V(f)\cup V(g)=\{\vec{r}\in\mathbb{R}^3 \mid (1-u(-f(\vec{r})))(1-u(-g(\vec{r})))=0\}. \tag{7.476}$$

7.68 Ortonormalisasi Gram-Schmidt

Andaikan ada sebuah ruang vektor $\mathcal{H}$ di atas lapangan $\mathbb{C}$. Andaikan ada seperangkat vektor $B_n := \{\psi_1,\cdots,\psi_n\}\subset\mathcal{H}$ yang bebas linier. Ortonormalisasi Gram-Schmidt dari B_n menghasilkan seperangkat vektor $O_n := \{\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}\subset\mathcal{H}$ yang ortonormal. Andaikan didefinisikan sebuah produk skalar $\langle\alpha|\beta\rangle\in\mathbb{C}$ untuk semua $\alpha,\beta\in\mathcal{H}$. Andaikan pula didefinisikan sebuah norma $\|\alpha\| := \sqrt{\langle\alpha|\alpha\rangle}\in\mathbb{C}$ untuk semua $\alpha\in\mathcal{H}$.

Mula-mula, $\varphi_1 := \psi_1/\|\psi_1\|$.

Selanjutnya,

$$\varphi_j := \frac{1}{N_j}\left(\psi_j-\sum_{k=1}^{j-1}\left\langle\varphi_k|\psi_j\right\rangle\varphi_k\right) \tag{7.477}$$

di mana

$$N_j := \left\|\psi_j-\sum_{k=1}^{j-1}\left\langle\varphi_k|\psi_j\right\rangle\varphi_k\right\| \tag{7.478}$$

untuk setiap $j\in\{2,\cdots,n\}$.

Ternyata, $\left\langle\varphi_j|\varphi_l\right\rangle=\delta_{jl}$ untuk setiap $j,l\in\{1,\cdots,n\}$.

Pembuktian hal ini secara umum sangat rumit, mengingat terdapat ungkapan rekursif. Namun, kita akan membuktikan kasus khusus untuk $n=3$.

Tentu jelas bahwa $\left\langle\varphi_j|\varphi_j\right\rangle=\|\varphi_j\|^2=N_j^2/N_j^2=1$ untuk semua $j\in\{1,2,3\}$.

Sekarang, kita tinggal membuktikan bahwa $\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle=\langle\varphi_1|\varphi_3\rangle=\langle\varphi_2|\varphi_3\rangle=0$.

Mula-mula kita tulis secara eksplisit bahwa

$$\varphi_2=\frac{1}{N_2}\left(\psi_2-\langle\varphi_1|\psi_2\rangle\varphi_1\right) \tag{7.479}$$

dan

$$\varphi_3=\frac{1}{N_3}\left(\psi_3-\langle\varphi_1|\psi_3\rangle\varphi_1-\langle\varphi_2|\psi_3\rangle\varphi_2\right). \tag{7.480}$$

$$\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle=\frac{1}{N_2}\left(\langle\varphi_1|\psi_2\rangle-\langle\varphi_1|\psi_2\rangle\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle\right)=0. \tag{7.481}$$

$$\langle\varphi_1|\varphi_3\rangle=\frac{1}{N_3}\left(\langle\varphi_1|\psi_3\rangle-\langle\varphi_1|\psi_3\rangle\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle-\langle\varphi_2|\psi_3\rangle\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle\right)=0. \tag{7.482}$$

$$\begin{aligned}
\langle\varphi_2|\varphi_3\rangle &= \frac{1}{N_2N_3}\left(\langle\psi_2|\psi_3\rangle - \langle\varphi_1|\psi_3\rangle\langle\psi_2|\varphi_1\rangle\right.\\
&\quad - \langle\varphi_2|\psi_3\rangle\langle\psi_2|\varphi_2\rangle - \langle\psi_2|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|\psi_3\rangle\\
&\quad \left.+ \langle\psi_2|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|\psi_3\rangle\right)\\
&= \frac{1}{N_2N_3}\left(\langle\psi_2|\psi_3\rangle - \langle\varphi_1|\psi_3\rangle\langle\psi_2|\varphi_1\rangle\right.\\
&\quad -\frac{1}{N_2^2}\left(\langle\psi_2|\psi_3\rangle - \langle\psi_2|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|\psi_3\rangle\right)\\
&\quad \left.\left(\|\psi_2\|^2 - \langle\varphi_1|\psi_2\rangle\langle\psi_2|\varphi_1\rangle\right)\right).
\end{aligned} \tag{7.483}$$

Karena $N_2^2 = \|\psi_2\|^2 - |\langle\varphi_1|\psi_2\rangle|^2$, maka

$$\begin{aligned}
\langle\varphi_2|\varphi_3\rangle &= \frac{1}{N_2N_3}\left(\langle\psi_2|\psi_3\rangle - \langle\psi_2|\psi_3\rangle - \langle\psi_2|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|\psi_3\rangle\right.\\
&\quad \left.+ \langle\psi_2|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|\psi_3\rangle\right) = 0.
\end{aligned} \tag{7.484}$$

7.69 Homomorfisme antara Grup Konvolusi Fungsi dan Grup Perkalian Fungsi

Andaikan ada himpunan $C(\mathbb{R},\mathbb{C})$ yang berisi semua fungsi dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{C}$.

Transformasi Fourier $F : C(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to C(\mathbb{R},\mathbb{C})$ antara lain didefinisikan sedemikian

$$(F(f))(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt, \tag{7.485}$$

sedangkan konvolusi antara dua buah fungsi $f, g \in C(\mathbb{R},\mathbb{C})$ antara lain adalah $f * g$ sedemikian

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau. \tag{7.486}$$

Andaikan ada dua buah grup, yaitu $(C(\mathbb{R},\mathbb{C}),\ )$ dan $(C(\mathbb{R},\mathbb{C}),*)$.

$$\begin{aligned}
(F(f)F(g))(\omega) &= (F(f))(\omega)(F(g))(\omega) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt \int_{-\infty}^{\infty} g(t')e^{i\omega t'}dt' \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t')e^{i\omega(t+t')}dt'dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(\tau-t)e^{i\omega\tau}d\tau\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(\tau-t)dt\, e^{i\omega\tau}d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (f*g)(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(F(f*g))(\omega).
\end{aligned} \tag{7.487}$$

Di samping itu,

$$\begin{aligned}
(F(f)*F(g))(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}(F(f))(\omega-u)(F(g))(u)du \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i(\omega-u)t}dt\int_{-\infty}^{\infty} g(t')e^{iut'}dt'du \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t')e^{i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iu(t'-t)}du\, dt\, dt' \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t')e^{i\omega t}\delta(t'-t)dt'dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)e^{i\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (fg)(t)e^{i\omega t}dt \\
&= \sqrt{2\pi}(F(fg))(\omega).
\end{aligned} \tag{7.488}$$

Dari dua perhitungan tersebut, diperoleh kesimpulan bahwa

$$F(f*g) = \sqrt{2\pi}F(f)F(g) \tag{7.489}$$

dan

$$F(fg) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}F(f)*F(g) \tag{7.490}$$

sehingga homomorfisme dari grup $(C(\mathbb{R},\mathbb{C}),*)$ ke grup $(C(\mathbb{R},\mathbb{C}),\ )$ adalah $\sqrt{2\pi}F$, sedangkan homomorfisme dari grup $(C(\mathbb{R},\mathbb{C}),\ )$ ke grup $(C(\mathbb{R},\mathbb{C}),*)$ adalah $(1/\sqrt{2\pi})F$.

7.70 Pembuktian Ketaksamaan Segitiga

Andaikan ada sebuah ruang vektor $\mathcal{H}$ di atas lapangan kompleks $\mathbb{C}$. Andaikan di ruang $\mathcal{H}$ tersebut didefinisikan sebuah produk skalar antara dua buah vektor $\Psi, \Psi' \in \mathcal{H}$, yaitu $\langle\Psi|\Psi'\rangle \in \mathbb{C}$, serta sebuah norma $\|\Psi\| := \sqrt{\langle\Psi|\Psi\rangle} \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ untuk setiap $\Psi \in \mathcal{H}$. Tentu saja,

$$\begin{aligned}
\|\Psi\|^2 &= \left\| \frac{\langle\Psi'|\Psi\rangle}{\|\Psi'\|^2}\Psi' + \left(\Psi - \frac{\langle\Psi'|\Psi\rangle}{\|\Psi'\|^2}\Psi'\right) \right\|^2 \\
&= \frac{|\left\langle\Psi'|\Psi\right\rangle|^2}{\|\Psi'\|^2} + \left\|\Psi - \frac{\langle\Psi'|\Psi\rangle}{\|\Psi'\|^2}\Psi'\right\|^2 + \frac{2}{\|\Psi\|^2}\,\mathrm{Re}\left(\left\langle\Psi|\Psi'\right\rangle \left\langle \Psi' \middle| \Psi - \frac{\langle\Psi'|\Psi\rangle}{\|\Psi'\|^2}\Psi' \right\rangle\right) \\
&= \frac{|\left\langle\Psi'|\Psi\right\rangle|^2}{\|\Psi'\|^2} + \left\|\Psi - \frac{\langle\Psi'|\Psi\rangle}{\|\Psi'\|^2}\Psi'\right\|^2 \qquad (7.491)
\end{aligned}$$

karena

$$\left\langle \Psi' \middle| \Psi - \frac{\langle\Psi'|\Psi\rangle}{\|\Psi'\|^2}\Psi' \right\rangle = 0. \qquad (7.492)$$

Ini berarti

$$\|\Psi\|^2 \geq \frac{|\left\langle\Psi'|\Psi\right\rangle|^2}{\|\Psi'\|^2} \qquad (7.493)$$

alias

$$\|\Psi\|^2\|\Psi'\|^2 \geq |\left\langle\Psi'|\Psi\right\rangle|^2. \qquad (7.494)$$

Karena

$$|\left\langle\Psi'|\Psi\right\rangle|^2 = (\mathrm{Re}\left\langle\Psi'|\Psi\right\rangle)^2 + (\mathrm{Im}\left\langle\Psi'|\Psi\right\rangle)^2, \qquad (7.495)$$

maka

$$\|\Psi\|^2\|\Psi'\|^2 \geq (\mathrm{Re}\left\langle\Psi'|\Psi\right\rangle)^2 \qquad (7.496)$$

alias

$$-\|\Psi\|\|\Psi'\| \leq \mathrm{Re}\left\langle\Psi'|\Psi\right\rangle \leq \|\Psi\|\|\Psi'\|. \qquad (7.497)$$

Dari sini, kita anggap bahwa

$$\mathrm{Re}\left\langle\Psi'|\Psi\right\rangle = \|\Psi\|\|\Psi'\|\cos(\Psi, \Psi'). \qquad (7.498)$$

Selanjutnya,

$$\|\Psi + \Psi'\|^2 = \|\Psi\|^2 + \|\Psi'\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left\langle\Psi'|\Psi\right\rangle, \qquad (7.499)$$

sehingga

$$(\|\Psi\| - \|\Psi'\|)^2 \leq \|\Psi + \Psi'\|^2 \leq (\|\Psi\| + \|\Psi'\|)^2 \qquad (7.500)$$

alias

$$|\|\Psi\| - \|\Psi'\|| \leq \|\Psi + \Psi'\| \leq \|\Psi\| + \|\Psi'\| \qquad (7.501)$$

yang merupakan ketaksamaan segitiga.

7.71 Bentuk Umum dari Rumusan Delta Dirac dan Transformasi Fourier

Di berbagai literatur, terkadang kita melihat bentuk rumusan delta Dirac dan transformasi Fourier yang berbeda-beda. Oleh karena itu, di sini, saya akan menyajikan rumusan delta Dirac dan transformasi Fourier dalam bentuk umum.

Andaikan ada himpunan $C(\mathbb{R},\mathbb{C})$ yang berisi semua fungsi dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{C}$.

Andaikan ada delta Dirac $\delta : \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$.

Andaikan ada transformasi Fourier $F : C(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to C(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Andaikan $g := F(f)$.

Bentuk umum dari perumusan delta Dirac adalah

$$\delta(x) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha kx} dk \tag{7.502}$$

di mana $\alpha \in \mathbb{R}$ adalah sebuah tetapan.

Bentuk umum dari perumusan transformasi Fourier adalah

$$g(k) = \alpha A \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha kx} dx \tag{7.503}$$

di mana $A \in \mathbb{R}$ adalah sebuah tetapan.

Oleh karena itu,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{-i\alpha kx'} dk = \alpha A \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha k(x-x')} dk\, dx \tag{7.504}$$

$$= 2\pi A \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x') dx = 2\pi A f(x') \tag{7.505}$$

sehingga

$$f(x) = \frac{1}{2\pi A}\int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{-i\alpha kx} dk. \tag{7.506}$$

Apabila $A = 1$ dan $\alpha = 1$, maka $\alpha/(2\pi) = 1/(2\pi)$, $\alpha A = 1$, dan $1/(2\pi A) = 1/(2\pi)$.

Apabila $A = 1/\sqrt{2\pi}$ dan $\alpha = 1$, maka $\alpha/(2\pi) = 1/(2\pi)$, $\alpha A = 1/\sqrt{2\pi}$, dan $1/(2\pi A) = 1/\sqrt{2\pi}$.

Apabila $A = 1/(2\pi)$ dan $\alpha = 2\pi$, maka $\alpha/(2\pi) = 1$, $\alpha A = 1$, dan $1/(2\pi A) = 1$.

7.72 Forma Volume dalam Bentuk Umum

Andaikan di titik $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$ ada sebuah forma-n volume alamiah, yaitu

$$d^n\vec{r} := dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n. \tag{7.507}$$

Andaikan ada peubah lain, yaitu $q^1, \cdots, q^n \in \mathbb{R}$ yang bergantung pada peubah $x^1, \cdots, x^n \in \mathbb{R}$ secara $dx^i = M^i{}_j dq^j$ di mana $M^i{}_j := \partial x^i/\partial q^j$ untuk semua $i \in \{1, \cdots, n\}$.

Tentu saja,

$$
\begin{aligned}
d^n\vec{r} &= M^1{}_{i_1}\cdots M^n{}_{i_n} dq^{i_1}\wedge\cdots\wedge dq^{i_n} \\
&= M^1{}_{i_1}\cdots M^n{}_{i_n}\epsilon^{i_1\cdots i_n} dq^1\wedge\cdots\wedge dq^n \\
&= (\det M) dq^1\wedge\cdots\wedge dq^n, \qquad (7.508)
\end{aligned}
$$

di mana ϵ adalah epsilon Levi-Civita.

Sekarang, mengingat $|d\vec{r}|^2$ (bahkan $d\vec{r}$) tidak bergantung pada pemilihan koordinat, maka

$$g'_{ij}dx^i dx^j = g_{kl}dq^k dq^l \qquad (7.509)$$

di mana $\overleftrightarrow{g} := g'_{ij}\hat{x}_i\otimes\hat{x}_j = g_{kl}\vec{e}_k\otimes\vec{e}_l$ adalah tensor metriks di titik $\vec{r}$. Di sini, $\hat{x}_i$ adalah vektor basis alamiah, dan $\vec{e}_i$ adalah vektor basis kontravarian yang secara umum bergantung pada $q^1,\cdots,q^n$ untuk semua $i\in\{1,\cdots,n\}$.

Karena untuk basis alamiah Minkowskian, $g'_{ij}=\eta_{ij}$ yang merupakan komponen metriks Minkowskian, maka persamaan terakhir menjadi

$$\eta_{ij}M^i{}_k M^j{}_l dq^k dq^l = g_{kl}dq^k dq^l \qquad (7.510)$$

alias

$$\eta_{ij}M^i{}_k M^j{}_l = g_{kl} \qquad (7.511)$$

yang dapat ditulis dalam bentuk matriks menjadi

$$M^{\mathsf{T}}\eta M = G \qquad (7.512)$$

di mana unsur ke-ij dari matriks M, η, dan G berturut-turut adalah $M^i{}_j$, η_{ij}, dan g_{ij}. Tentu saja, dengan mengambil determinan pada kedua ruas persamaan terakhir, diperoleh

$$(\det M)^2\det\eta = g, \qquad (7.513)$$

mengingat $\det(M^{\mathsf{T}}) = \det M$, di mana $g := \det G$. Karena $\det\eta$ pada umumnya adalah -1, maka

$$\det M = \sqrt{-g} \qquad (7.514)$$

dengan mengambil akar positifnya.

Dari persamaan sebelumnya, akhirnya diperoleh

$$d^n\vec{r} = \sqrt{-g}\, dq^1\wedge\cdots\wedge dq^n. \qquad (7.515)$$

7.73 Deformasi Objek Geometris

Objek geometris di ruang $\mathbb{R}^3$ dapat berupa titik, kurva, permukaan, maupun volume pejal. Deformasi objek-objek geometris merupakan perubahan lokus (tempat kedudukan) suatu titik, kurva, permukaan, maupun volume pejal di ruang $\mathbb{R}^3$. Deformasi dapat berupa translasi, rotasi, dilatasi, maupun perubahan bentuk yang lain.

Deformasi sebuah titik dinyatakan oleh

$$\vec{r} = \vec{f}(t) \qquad (7.516)$$

untuk setiap $t \in \mathbb{R}$ dan $\vec{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ adalah sebuah pemetaan kontinyu.

Deformasi sebuah kurva dinyatakan oleh

$$C(f, g, t) := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{r}, t) = g(\vec{r}, t) = 0\} \tag{7.517}$$

untuk setiap $t \in \mathbb{R}$ dan $f, g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ adalah dua buah pemetaan kontinyu.

Deformasi sebuah permukaan dinyatakan oleh

$$S(f, t) := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{r}, t) = 0\} \tag{7.518}$$

untuk setiap $t \in \mathbb{R}$ dan $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ adalah sebuah pemetaan kontinyu.

Deformasi sebuah volume pejal dinyatakan oleh

$$V(f, t) := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{r}, t) < 0\} \tag{7.519}$$

untuk setiap $t \in \mathbb{R}$ dan $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ adalah sebuah pemetaan kontinyu.

Bab 8

Serbaneka Fisika

8.1 Dimensi Sudut Datar

Sebenarnya, 1 radian itu tidak sama dengan 1 tanpa satuan.

Panjang busur lingkaran berjari-jari R dengan sudut pusat θ sering kali ditulis sebagai $s = \theta R$ apabila kita memakai sistem satuan sedemikian rupa $1\,\mathrm{rad} = 1$. Apabila kita ingin mengetahui rumus panjang busur lingkaran tersebut yang sebenarnya, tanpa menerapkan penyamaan $1\,\mathrm{rad} = 1$, maka sebenarnya

$$s = \frac{\theta}{360°} 2\pi R = \frac{\theta}{2\pi\,\mathrm{rad}} 2\pi R = \frac{\theta}{1\,\mathrm{rad}} R = \frac{\theta R}{\mathrm{rad}}. \tag{8.1}$$

Inilah rumus panjang busur lingkaran yang sebenarnya.

Sebagai contoh, kita ingin mengetahui panjang busur setengah lingkaran berjari-jari R, maka $\theta = 180° = \pi\,\mathrm{rad}$, sehingga

$$s = \theta R/\,\mathrm{rad} = (\pi\,\mathrm{rad})R/\,\mathrm{rad} = \pi R. \tag{8.2}$$

Oleh karena itu, sebenarnya besaran sudut datar itu tetaplah berdimensi, yaitu dimensi sudut datar, dengan satuan SI yaitu radian alias rad.

Masalah ini diangkat, mengingat dalam teori medan kuantum, misalnya, kita sering mengidentikkan $c = \hbar = 1$ meskipun sebenarnya c dan $\hbar$ itu berbeda dimensi dan satuan.

8.2 Sistem Satuan Kuantum Relativistik

Kadang-kadang, dalam perhitungan fisika, kita memakai sistem satuan kuantum relativistik, yaitu $c = \hbar = 1$, di mana $c := \alpha\,\mathrm{m/s}$ adalah kelajuan cahaya dalam ruang hampa, dan $\hbar := \beta\,\mathrm{J\,s}$ adalah tetapan Planck tereduksi, sedemikian $\alpha := 2,998(10^8)$ dan $\beta := 1,055(10^{-34})$. Diketahui, muatan elementer adalah $e := \gamma\,\mathrm{C}$ di mana $\gamma := 1,6(10^{-19})$. Oleh karena itu,

$$\alpha\,\mathrm{m/s} = 1 \quad \text{dan} \quad \beta\,\mathrm{kg\,m^2/s} = 1. \tag{8.3}$$

Dari sistem persamaan terakhir, diperoleh

$$(\beta/\alpha)\,\mathrm{kg\,m} = 1 \tag{8.4}$$

alias

$$\mathrm{m} = (\alpha/\beta)/\,\mathrm{kg} \tag{8.5}$$

serta

$$\mathrm{s} = \alpha\,\mathrm{m} = (\alpha^2/\beta)/\,\mathrm{kg}\,. \tag{8.6}$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}\mathrm{kg} &= \mathrm{kg}\,\alpha^2\,\mathrm{m}^2/\,\mathrm{s}^2 = \alpha^2\,\mathrm{J} = \alpha^2\,\mathrm{V\,C} = \alpha^2(1/(\gamma\,\mathrm{C}))\,\mathrm{eV\,C} \\ &= (\alpha^2/\gamma)\,\mathrm{eV} = (\alpha^2/\gamma)10^{-9}\,\mathrm{GeV} = 5,62(10^{26})\,\mathrm{GeV}\,. \end{aligned} \tag{8.7}$$

Demikian pula,

$$\mathrm{m} = (\gamma/(\alpha\beta))10^9\,\mathrm{GeV}^{-1} = 5,07(10^{15})\,\mathrm{GeV}^{-1} \tag{8.8}$$

dan

$$\mathrm{s} = (\gamma/\beta)10^9\,\mathrm{GeV}^{-1} = 1,52(10^{24})\,\mathrm{GeV}^{-1}\,. \tag{8.9}$$

8.3 Waktu Relatif

Besaran waktu itu merupakan pelabelan (penyematan) nilai yang disepakati oleh sebuah benda (pengamat).

Andaikan pada suatu saat tertentu, waktu menurut pengamat A adalah $t_A \in \mathbb{R}$, serta waktu menurut pengamat B adalah $t_B \in \mathbb{R}$. Andaikan pula, pada suatu saat tertentu yang lain, waktu menurut pengamat A adalah $t'_A \in \mathbb{R}$, serta waktu menurut pengamat B adalah $t'_B \in \mathbb{R}$. Apabila hubungan antara waktu menurut A, yaitu $T_A \in \mathbb{R}$, dan waktu menurut B, yaitu $T_B \in \mathbb{R}$ adalah linier, maka berlakulah kaitan

$$T_B = MT_A + N \tag{8.10}$$

di mana $M, N \in \mathbb{R}$ adalah tetapan yang hendak dicari kemudian.

Dengan memasukkan nilai $(T_A, T_B) = (t_A, t_B)$ dan $(T_A, T_B) = (t'_A, t'_B)$, maka diperoleh sistem persamaan

$$t_B = Mt_A + N \qquad \text{dan} \qquad t'_B = Mt'_A + N \tag{8.11}$$

yang apabila disajikan dalam bentuk matriks, keduanya menjadi

$$\begin{pmatrix} t_B \\ t'_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_A & 1 \\ t'_A & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}. \tag{8.12}$$

Dengan aturan Cramer, serta dengan mendefinisikan

$$T := \begin{vmatrix} t_A & 1 \\ t'_A & 1 \end{vmatrix}, \qquad m := \begin{vmatrix} t_B & 1 \\ t'_B & 1 \end{vmatrix}, \qquad \text{dan} \qquad n := \begin{vmatrix} t_A & t_B \\ t'_A & t'_B \end{vmatrix}, \tag{8.13}$$

alias

$$T = t_A - t'_A, \qquad m = t_B - t'_B, \qquad \text{dan} \qquad n = t_A t'_B - t'_A t_B, \tag{8.14}$$

sehingga

$$M = \frac{m}{T} = \frac{t_B - t'_B}{t_A - t'_A} \qquad \text{dan} \qquad N = \frac{n}{T} = \frac{t_A t'_B - t'_A t_B}{t_A - t'_A}. \tag{8.15}$$

Dengan memasukkan nilai M dan N ke persamaan pertama, diperoleh hubungan relatif antara T_A dan T_B, yaitu

$$T_B = \frac{(t_B - t'_B)T_A + (t_A t'_B - t'_A t_B)}{t_A - t'_A}. \tag{8.16}$$

8.4 Posisi Titik Rata-Rata terhadap Waktu

Posisi rata-rata sebuah titik $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$ yang bergantung pada waktu $t \in \mathbb{R}$ terhadap waktu t sejak $t = 0$ didefinisikan sebagai

$$\langle \vec{r} \rangle := \frac{1}{t} \int_0^t \vec{r}\, dt. \tag{8.17}$$

Sebagai contoh, andaikan $n = 2$, serta

$$\vec{r} = R(\hat{x} \cos \omega t + \hat{y} \sin \omega t) \tag{8.18}$$

yang merupakan gerak melingkar beraturan, di mana $R \in \mathbb{R}^+$ adalah jari-jari lintasan gerak melingkar tersebut, $\omega \in \mathbb{R} - \{0\}$ adalah frekuensi sudut gerak melingkar tersebut yang konstan, $t \in \mathbb{R}$ adalah waktu, serta $\hat{x} := (1, 0)$ dan $\hat{y} := (0, 1)$. Tentu saja

$$\langle \vec{r} \rangle = \frac{R}{\omega t}(\hat{x} \sin \omega t - \hat{y}(\cos \omega t - 1)). \tag{8.19}$$

Vektor $\langle \vec{r} \rangle$ tersebut akan cenderung semakin mendekati titik $(0, 0)$ seiring dengan bertambahnya nilai t.

Contoh berikutnya adalah gerak ayunan selaras. Andaikan $n = 1$, serta $\vec{r} = z$, di mana

$$z = z_0 \cos \omega t \tag{8.20}$$

dengan $z_0 \in \mathbb{R}$ adalah posisi awal partikel tersebut, $\omega \in \mathbb{R} - \{0\}$ adalah frekuensi sudut ayunan tersebut, dan t adalah waktu. Tentu saja,

$$\langle z \rangle = \frac{z_0}{\omega t} \sin \omega t. \tag{8.21}$$

Posisi $\langle z \rangle$ tersebut akan cenderung semakin mendekati titik 0 seiring dengan bertambahnya nilai t.

8.5 Perlajuan Partikel

Andaikan $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ adalah kecepatan sebuah partikel di ruang $\mathbb{R}^3$. Tentu saja $|\vec{v}|$ adalah kelajuan partikel tersebut. Perlajuan milik partikel tersebut pada waktu $t \in \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai $(d\vec{v}/dt) \cdot \vec{v}/|\vec{v}|$. Ternyata,

$$a_{//} := \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{2} \frac{2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}}{|\vec{v}|} = \frac{d}{dt}\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}. \tag{8.22}$$

Sekarang, hendak dibuktikan bahwa $\vec{v}\cdot(d/dt)(\vec{v}/|\vec{v}|) = 0$. Buktinya adalah sebagai berikut.

$$\vec{v}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}\right) - \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d|\vec{v}|}{dt} - \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = a_{//} - a_{//} = 0. \tag{8.23}$$

8.6 Turunan Waktu Vektor Posisi yang Berotasi

Misalkan di ruang $\mathbb{R}^3$ ada vektor sudut rotasi $\vec{\theta} := \theta\hat{n}$ yang berpangkal di titik $\vec{0}$, di mana θ merupakan sudut rotasi yang bergantung pada waktu t, serta $\hat{n}$ merupakan vektor satuan arah orientasi rotasi yang konstan terhadap t. Vektor posisi mula-mula $\vec{r}_0$ yang berotasi oleh $\vec{\theta}$ tersebut pada waktu t akan berpindah ke posisi

$$\vec{r} = (\hat{n}\cdot\vec{r}_0)\hat{n} + (\hat{n}\times\vec{r}_0)\times\hat{n}\cos\theta + \hat{n}\times\vec{r}_0\sin\theta. \tag{8.24}$$

Turunan $\vec{r}$ terhadap t tentu saja adalah

$$\vec{v} := \frac{d\vec{r}}{dt} = -(\hat{n}\times\vec{r}_0)\times\hat{n}\frac{d\theta}{dt}\sin\theta + \hat{n}\times\vec{r}_0\frac{d\theta}{dt}\cos\theta, \tag{8.25}$$

sehingga

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times(\hat{n}\times\vec{r}_0\sin\theta + \vec{r}_0\cos\theta), \tag{8.26}$$

di mana $\vec{\omega} := d\vec{\theta}/dt$.

Karena $(\hat{n}\times\vec{r}_0)\times\hat{n} = \vec{r}_0 - (\hat{n}\cdot\vec{r}_0)\hat{n}$ dan $\vec{\omega}\times\hat{n} = \vec{0}$, maka

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times((\hat{n}\cdot\vec{r}_0)\hat{n} + (\hat{n}\times\vec{r}_0)\times\hat{n}\cos\theta + \hat{n}\times\vec{r}_0\sin\theta), \tag{8.27}$$

sehingga

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}. \tag{8.28}$$

8.7 Rotasi Benda Tegar

Andaikan $d\theta := \theta_t(t+dt) - \theta$, $\dot{\theta} := d\theta/dt$, $|\hat{\theta}| = 1$, dan $\dot{\vec{r}} := d\vec{r}/dt$. Di ruang $\mathbb{R}^3$ pada waktu $t \in \mathbb{R}$, sebuah titik dengan posisi $\vec{r}$ yang dirotasikan murni secara aktif selama selang waktu dt oleh vektor sudut rotasi $\vec{\theta} = \theta\hat{\theta}$ dengan pangkal di $\vec{0}$ akan mengalami perpindahan ke posisi

$$\begin{aligned}
\vec{r}_t(t+dt) &= (\hat{\theta}\cdot\vec{r})\hat{\theta} + (\hat{\theta}\times\vec{r})\times\hat{\theta}\cos d\theta + \hat{\theta}\times\vec{r}\sin d\theta \\
&= (\hat{\theta}\cdot\vec{r})\hat{\theta} + (\hat{\theta}\times\vec{r})\times\hat{\theta} + \hat{\theta}\times\vec{r}d\theta \\
&= (\hat{\theta}\cdot\vec{r})\hat{\theta} + (\vec{r} - (\hat{\theta}\cdot\vec{r})\hat{\theta}) + \hat{\theta}\times\vec{r}d\theta \\
&= \vec{r} + \hat{\theta}\times\vec{r}d\theta
\end{aligned} \tag{8.29}$$

sehingga

$$\vec{r}_t(t+dt) - \vec{r} \equiv d\vec{r} = \hat{\theta}\times\vec{r}d\theta \tag{8.30}$$

alias

$$\boxed{\dot{\vec{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta}\times\vec{r}.} \tag{8.31}$$

Persamaan terakhir ini merupakan persamaan diferensial vektor. Untuk mencari $\vec{r}$ pada waktu t secara eksplisit, maka persamaan tersebut harus diselesaikan untuk $\vec{r}$ yang bergantung t.

8.8 Percepatan Tangensial dan Sentripetal Gerak Rotasi

Kecepatan gerak rotasi partikel pada waktu t dengan vektor sudut rotasi $\vec{\theta} := \theta\hat{\theta}$ yang berpangkal di titik $\vec{0}$ sejauh sudut θ, dengan $\hat{\theta}$ konstan, adalah

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{8.32}$$

di mana $\vec{\omega} := d\vec{\theta}/dt$ adalah kecepatan sudutnya, dan $\vec{r}$ adalah posisi partikel tersebut.

Percepatan partikel tersebut, tentu saja adalah

$$\vec{a} := d\vec{v}/dt = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} \tag{8.33}$$

di mana $\vec{\alpha} := d\vec{\omega}/dt$ adalah percepatan sudutnya.

Dari persamaan (8.32) dan (8.33), diperoleh percepatan tangensial, yaitu

$$\begin{aligned} \vec{a}_{//} &= \vec{a} \cdot \vec{v}\vec{v}/|\vec{v}|^2 = (\vec{\alpha} \times \vec{r}) \cdot \vec{v}\vec{v}/|\vec{v}|^2 \\ &= (\vec{\alpha} \times \vec{r}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r})(\vec{\omega} \times \vec{r})/(\omega^2 r^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2) \\ &= \alpha(1/\omega)(1 - (\hat{\theta} \cdot \hat{r})^2)(\vec{\omega} \times \vec{r})/(1 - (\hat{\theta} \cdot \hat{r})^2) \\ &= \alpha(1/\omega)(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \alpha\hat{\theta} \times \vec{r} = \vec{\alpha} \times \vec{r}. \end{aligned} \tag{8.34}$$

Sedangkan, percepatan sentripetalnya adalah

$$\vec{a}_{\perp} := \vec{a} - \vec{a}_{//} = \vec{\omega} \times \vec{v} = (\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{\omega} - \omega^2\vec{r}. \tag{8.35}$$

8.9 Gerak Tumbukan Satu-Dimensi

Andaikan pada garis riil $\mathbb{R}$ ada dua buah partikel klasik yang bergerak lurus beraturan. Partikel pertama yang bermassa $m_1 \in \mathbb{R}^+$ menempati posisi $x_1 := x_{10} + v_{10}t$ pada waktu $t < T \in \mathbb{R}$. Partikel kedua yang bermassa $m_2 \in \mathbb{R}^+$ menempati posisi $x_2 := x_{20} + v_{20}t$ pada waktu $t < T$ pula. Besaran waktu T ini akan didefinisikan kemudian. Di sini, $x_{10}, v_{10} \in \mathbb{R}$ berturut-turut adalah posisi awal dan kecepatan awal partikel pertama, serta $x_{20}, v_{20} \in \mathbb{R}$ berturut-turut adalah posisi awal dan kecepatan awal partikel kedua. Kedua partikel tersebut bertumbukan di titik $X \in \mathbb{R}$ pada waktu $T > 0$, sehingga

$$x_{10} + v_{10}T = x_{20} + v_{20}T \tag{8.36}$$

alias

$$T = \frac{x_{20} - x_{10}}{v_{10} - v_{20}}. \tag{8.37}$$

Oleh karena itu,

$$X = x_{10} + v_{10}T = \frac{v_{10}x_{20} - v_{20}x_{10}}{v_{10} - v_{20}}. \tag{8.38}$$

Konstanta restitusi tumbukan $\epsilon \in \mathbb{R}$ didefinisikan sedemikian

$$\epsilon(v_{20} - v_{10}) = V_1 - V_2 \tag{8.39}$$

di mana $V_1, V_2 \in \mathbb{R}$ berturut-turut adalah kecepatan partikel pertama dan kedua setelah tumbukan yang konstan. Dari hukum kelestarian momentum linier, diperoleh

$$m_1 V_1 + m_2 V_2 = m_1 v_{10} + m_2 v_{20}. \tag{8.40}$$

Penyelesaian dari kedua persamaan terakhir menghasilkan

$$V_1 = \frac{(m_1 - \epsilon m_2) v_{10} + (1+\epsilon) m_2 v_{20}}{m_1 + m_2} \tag{8.41}$$

dan

$$V_2 = \frac{(1+\epsilon) m_1 v_{10} + (m_2 - \epsilon m_1) v_{20}}{m_1 + m_2}. \tag{8.42}$$

Jadi, untuk seluruh $t \in \mathbb{R}$, posisi partikel pertama adalah

$$X_1 = (x_{10} + v_{10} t) u(T - t) + [X + V_1 (t - T)] u(t - T) \tag{8.43}$$

dan posisi partikel kedua adalah

$$X_2 = (x_{20} + v_{20} t) u(T - t) + [X + V_2 (t - T)] u(t - T), \tag{8.44}$$

di mana $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi undak satuan Heaviside sedemikian $u(x) = 1$ untuk $x > 0$, $u(x) = 0$ untuk $x < 0$, dan $u(0) = 1/2$.

8.10 Syarat Benda Tegar

Syarat suatu benda $M \subseteq \mathbb{R}^3$ disebut benda tegar adalah bahwa posisi titik $\vec{r}_i \in M$ untuk setiap $i \in \{1, \cdots, n\}$ dapat dinyatakan sebagai rotasi dan translasi setiap titik $\vec{r}_{0i} \in M_0 \subseteq \mathbb{R}^3$ di mana M dan M_0 kongkruen sedemikian

$$\vec{r}_i = \hat{n}(\vec{r}_{0i} \cdot \hat{n}) + (\hat{n} \times \vec{r}_{0i}) \times \hat{n} \cos\theta + \hat{n} \times \vec{r}_{0i} \sin\theta + \vec{R} \tag{8.45}$$

di mana $\hat{n} \in \mathbb{R}^3$ adalah arah vektor satuan sudut rotasi yang berpangkal di titik $(0, 0, 0)$, $\theta \in \mathbb{R}$ adalah sudut rotasi, dan $\vec{R} \in \mathbb{R}^3$ adalah parameter translasi.

Ternyata, dari perhitungan yang teliti, diperoleh

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2 = |\vec{r}_{0i} - \vec{r}_{0j}|^2 \tag{8.46}$$

untuk setiap $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, yang berarti bahwa jarak sebarang dua titik pada M selalu tetap.

Contoh soalnya adalah sebagai berikut.

Andaikan diketahui bahwa posisi n buah titik $\vec{r}_i$ yang bergantung pada waktu $t \in \mathbb{R}$ secara kontinyu untuk setiap $i \in \{1, \cdots, n\}$. Apakah sistem n buah titik tersebut merupakan benda tegar?

Jawabannya adalah sebagai berikut.

Kita harus menguji apakah setiap dua buah titik $\vec{r}_i$ dan $\vec{r}_j$ untuk setiap $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ berlaku kaitan

$$\frac{d}{dt} |\vec{r}_i - \vec{r}_j| = 0. \tag{8.47}$$

Jika persamaan terakhir dipenuhi, maka sistem n buah titik tersebut merupakan benda tegar. Jika persamaan terakhir tidak dipenuhi, maka sistem n buah titik tersebut bukanlah benda tegar.

8.11 Syarat Gerak Benda Tegar

Misalkan ada sistem n buah partikel, yang terletak pada posisi $\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_n \in \mathbb{R}^3$ pada waktu $t \in \mathbb{R}$, yaitu bahwa $\vec{r}_i := f_i(t)$ di mana $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ adalah pemetaan untuk setiap $i \in \{1, \cdots, n\}$. Sistem partikel tersebut disebut benda tegar apabila memenuhi dua syarat, yaitu

$$(d/dt)|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = 0 \tag{8.48}$$

untuk setiap $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, serta f_i merupakan pemetaan kontinyu untuk setiap $i \in \{1, \cdots, n\}$. Apabila gerak sistem partikel tersebut memenuhi kedua syarat tersebut, maka gerak sistem partikel tersebut merupakan gerak benda tegar. Apabila tidak, maka gerak sistem tersebut bukanlah gerak benda tegar.

8.12 Paduan Getaran-Getaran Selaras Sederhana yang Sefrekuensi tetapi Berbeda Arah Getaran-nya dan Fasenya

Ada n buah getaran selaras sederhana, yaitu

$$\vec{r}_i := \vec{A}_i \cos(\omega t - \delta_i) \in \mathbb{R}^3 \tag{8.49}$$

untuk semua $i \in \{1, \cdots, n\}$, di mana $\vec{A}_i \in \mathbb{R}^3$ adalah vektor tetapan amplitudo, $\omega \in \mathbb{R}$ adalah skalar tetapan frekuensi sudut getaran, $t \in \mathbb{R}$ adalah waktu, dan $\delta_i \in \mathbb{R}$ adalah sudut fase getaran.

Paduan dari n buah getaran tersebut adalah

$$\begin{aligned} \vec{r} &:= \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{A}_i \cos(\omega t - \delta_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \vec{A}_i (\cos\delta_i \cos\omega t + \sin\delta_i \sin\omega t) = \vec{A}\cos\omega t + \vec{B}\sin\omega t \end{aligned} \tag{8.50}$$

di mana

$$\vec{A} := \sum_{i=1}^{n} \vec{A}_i \cos\delta_i \quad \text{dan} \quad \vec{B} := \sum_{i=1}^{n} \vec{A}_i \sin\delta_i. \tag{8.51}$$

Tentu saja,

$$\begin{aligned} |\vec{r}|^2 &= |\vec{A}|^2 \cos^2\omega t + |\vec{B}|^2 \sin^2\omega t + 2\vec{A}\cdot\vec{B}\cos\omega t \sin\omega t. \\ &= (1/2)[(|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2) + (|\vec{A}|^2 - |\vec{B}|^2)]\cos^2\omega t \\ &\quad +(1/2)[(|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2) - (|\vec{A}|^2 - |\vec{B}|^2)]\sin^2\omega t + \vec{A}\cdot\vec{B}\sin 2\omega t \\ &= (1/2)(|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2) + (1/2)(|\vec{A}|^2 - |\vec{B}|^2)\cos 2\omega t + \vec{A}\cdot\vec{B}\sin 2\omega t \\ &= (1/2)(|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2) + \sqrt{(1/4)(|\vec{A}|^2 - |\vec{B}|^2)^2 + (\vec{A}\cdot\vec{B})^2}\cos(2\omega t - \phi) \end{aligned}$$

di mana

$$\phi := \arctan_2((1/2)(|\vec{A}|^2 - |\vec{B}|^2), \vec{A}\cdot\vec{B}). \tag{8.52}$$

Kuantitas $|\vec{r}|^2$ mencapai maksimum apabila $2\omega t - \phi = 0$ alias $\omega t = \phi/2$, serta mencapai minimum apabila $2\omega t - \phi = \pi$ alias $\omega t = (\phi + \pi)/2$, sehingga didefinisikan

$$\vec{r}_{\text{mak}} := \vec{A}\cos(\phi/2) + \vec{B}\sin(\phi/2) =: \vec{a} \tag{8.53}$$

dan

$$\vec{r}_{\text{min}} := -\vec{A}\sin(\phi/2) + \vec{B}\cos(\phi/2) =: \vec{b} \tag{8.54}$$

yang keduanya disajikan dalam bentuk matriks menjadi

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi/2) & \sin(\phi/2) \\ -\sin(\phi/2) & \cos(\phi/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{A} \\ \vec{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{pmatrix}, \tag{8.55}$$

yang penyelesaiannya adalah

$$\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{a} & \sin(\phi/2) \\ \vec{b} & \cos(\phi/2) \end{vmatrix} = \vec{a}\cos(\phi/2) - \vec{b}\sin(\phi/2) \tag{8.56}$$

dan

$$\vec{B} = \begin{vmatrix} \cos(\phi/2) & \vec{a} \\ -\sin(\phi/2) & \vec{b} \end{vmatrix} = \vec{a}\sin(\phi/2) + \vec{b}\cos(\phi/2). \tag{8.57}$$

Karena tadi $\vec{r} = \vec{A}\cos\omega t + \vec{B}\sin\omega t$, maka

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (\vec{a}\cos(\phi/2) - \vec{b}\sin(\phi/2))\cos\omega t + (\vec{a}\sin(\phi/2) + \vec{b}\cos(\phi/2))\sin\omega t \\ &= \vec{a}\cos(\omega t - \phi/2) + \vec{b}\sin(\omega t - \phi/2). \end{aligned} \tag{8.58}$$

Karena

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (1/2)(|\vec{B}|^2 - |\vec{A}|^2)\sin\phi + \vec{A}\cdot\vec{B}\cos\phi = 0, \tag{8.59}$$

maka didefinisikan $\vec{a} := a\hat{x}'$ dan $\vec{b} := b\hat{y}'$ di mana $a, b \in \mathbb{R}^+$ dan $\hat{x}'\cdot\hat{y}' = 0$ serta $|\hat{x}'| = |\hat{y}'| = 1$.

Oleh karena itu,

$$\vec{r} = \hat{x}'x' + \hat{y}'y' = \hat{x}'a\cos(\omega t - \phi/2) + \hat{y}'b\sin(\omega t - \phi/2) \tag{8.60}$$

sehingga

$$x' = a\cos(\omega t - \phi/2) \quad \text{dan} \quad y' = b\sin(\omega t - \phi/2). \tag{8.61}$$

Karena $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ untuk semua $\alpha \in \mathbb{R}$, maka

$$(x'/a)^2 + (y'/b)^2 = 1 \tag{8.62}$$

yang menandakan bahwa trayektori paduan n buah getaran selaras tersebut berbentuk sebuah elips.

8.13 Tensor Kelembamban

Momen kelembaman sebuah sistem n buah partikel terhadap sumbu yang melalui titik asal koordinat yang diwakili oleh vektor satuan $\hat{n} \in \mathbb{R}^3$ didefinisikan sebagai

$$\boxed{I := \sum_{j=1}^{n} m_j |\vec{r}_j \times \hat{n}|^2} \tag{8.63}$$

di mana m_j adalah massa partikel ke-j, $\vec{r}_j := x_{jk}\hat{x}_k$ adalah posisi partikel ke-j, dan $\hat{n} := n_k\hat{x}_k$ adalah vektor satuan sebuah sumbu yang bertitik pangkal di titik asal koordinat, sehingga

$$\begin{aligned} I &= \sum_{j=1}^{n} m_j \epsilon_{klm} x_{jl} n_m \epsilon_{kpq} x_{jp} n_q \\ &= \sum_{j=1}^{n} m_j (\delta_{lp}\delta_{mq} - \delta_{lq}\delta_{mp}) x_{jl} x_{jp} n_m n_q \\ &= \sum_{j=1}^{n} m_j (x_{jl} x_{jl} n_m n_m - x_{jl} x_{jm} n_m n_l). \end{aligned} \tag{8.64}$$

Ini sama saja mengatakan bahwa

$$\boxed{I = \sum_{j=1}^{n} m_j (x_{js} x_{js} \delta_{ml} - x_{jl} x_{jm}) n_m n_l = I_{lm} n_l n_m} \tag{8.65}$$

di mana

$$\boxed{I_{lm} := \sum_{j=1}^{n} m_j (x_{js} x_{js} \delta_{ml} - x_{jl} x_{jm})} \tag{8.66}$$

merupakan komponen tensor kelembaman $\overleftrightarrow{I} := I_{lm}\hat{x}_l \otimes \hat{x}_m$.

8.14 Momen Inersia Sebuah Kubus Pejal terhadap Diagonal Ruangnya

Andaikan ada sebuah kubus pejal bermassa $m \in \mathbb{R}^+$ dengan panjang rusuk $s \in \mathbb{R}^+$. Kubus tersebut memiliki lokus (tempat kedudukan)

$$C(s) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -s/2 < x < s/2, -s/2 < y < s/2, -s/2 < z < s/2\}. \tag{8.67}$$

Vektor satuan yang berpangkal di titik $(0, 0, 0)$ dan sejajar dengan diagonal utama dari $C(s)$ adalah

$$\hat{n} := (n_x, n_y, n_z) = (1, 1, 1)/\sqrt{3} \tag{8.68}$$

sehingga $n_x = n_y = n_z = n_p := 1/\sqrt{3}$.

Kita akan mencari momen inersia I dari $C(s)$ terhadap $\hat{n}$. Mula-mula, kita mencari kesembilan komponen tensor momen inersia, yaitu $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, I_{xy} = I_{yx}, I_{yz} = I_{zy}$, dan $I_{zx} = I_{xz}$. Karena sumbu-x, sumbu-y, dan sumbu-z adalah sumbu-sumbu utama, serta karena $C(s)$ bersifat simetris terhadap sistem koordinat Cartesian (x, y, z), maka $I_{xy} = I_{yx} = I_{yz} = I_{zy} = I_{zx} = I_{xz} = I_0 = 0$, serta $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = I_p$, sehingga

$$I_p := \rho \int_{-s/2}^{s/2} \int_{-s/2}^{s/2} \int_{-s/2}^{s/2} (x^2 + y^2) dz\, dy\, dx \tag{8.69}$$

di mana $\rho := m/s^3$ adalah rapat massa homogen dari $C(s)$. Selanjutnya,

$$I_p = \rho s \int_{-s/2}^{s/2} \int_{-s/2}^{s/2} (x^2 + y^2) dy\, dx. \tag{8.70}$$

$$I_p = \rho s \int_{-s/2}^{s/2} (x^2 s + (2/3)((s/2)^3)) dx. \tag{8.71}$$

$$I_p = \rho s^2 \int_{-s/2}^{s/2} (x^2 + (1/12)s^2) dx. \tag{8.72}$$

$$I_p = \rho s^2 ((2/3)(s/2)^3 + (1/12)s^3). \tag{8.73}$$

$$I_p = \rho s^2 ((1/12)s^3 + (1/12)s^3) = (1/6)\rho s^5. \tag{8.74}$$

$$I_p = (1/6)(m/s^3)s^5 = (1/6)ms^2. \tag{8.75}$$

Kemudian,

$$I_0 := -\rho \int_{-s/2}^{s/2} \int_{-s/2}^{s/2} \int_{-s/2}^{s/2} xy\, dz\, dy\, dx = 0. \tag{8.76}$$

Rumus momen inersia I dari $C(s)$ adalah

$$I = I_{xx} n_x^2 + I_{yy} n_y^2 + I_{zz} n_z^2 + 2I_{xy} n_x n_y + 2I_{yz} n_y n_z + 2I_{zx} n_z n_x = 3I_p n_p^2 \tag{8.77}$$

sehingga $I = 3((1/6)ms^2)(1/3) = (1/6)ms^2$. Inilah momen inersia $C(s)$ terhadap $\hat{n}$.

8.15 Momen Inersia dari Silinder Pejal terhadap Garis yang Tegak Lurus Sumbu Utama Silinder yang Melalui Pusat Massa Silinder

Andaikan di ruang $\mathbb{R}^3$, ada sebuah silinder pejal

$$C(R, L) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2, -L \leq z \leq L\} \tag{8.78}$$

di mana $R \in \mathbb{R}^+$ adalah jari-jari $C(R, L)$, dan $L \in \mathbb{R}^+$ adalah setengah panjang $C(R, L)$.

Posisi sebuah titik di $C(R, L)$ tentu saja adalah

$$\vec{r} := (x, y, z) = (l \cos\phi, l \sin\phi, z) \in \mathbb{R}^3 \tag{8.79}$$

di mana $l \in [0, R]$, $\phi \in [0, 2\pi]$, dan $z \in [-L, L]$. Tentu saja, momen inersia $C(R, L)$ terhadap garis $\{k\hat{x} \mid k \in \mathbb{R}\}$, di mana $\hat{x} := (1, 0, 0)$, adalah

$$I = \int_{C(R,L)} (y^2 + z^2) dm \tag{8.80}$$

di mana $dm := \rho|d^3\vec{r}|$ adalah elemen massa dari $C(R,L)$, $\rho \in \mathbb{R}$ adalah rapat massa konstan dari $C(R,L)$, dan $d^3\vec{r} := l\,d\phi \wedge dl \wedge dz$ adalah elemen volume dari $C(R,L)$. Oleh karena itu,

$$I = \rho \int_{-L}^{L} \int_{0}^{R} \int_{0}^{2\pi} (l^2 \sin^2\phi + z^2) l\,d\phi\,dl\,dz. \tag{8.81}$$

$$I = \rho \int_{-L}^{L} \int_{0}^{R} (\pi l^2 + 2\pi z^2) l\,dl\,dz. \tag{8.82}$$

$$I = \rho\pi \int_{-L}^{L} \int_{0}^{R} (l^3 + 2z^2 l) dl\,dz. \tag{8.83}$$

$$I = \rho\pi \int_{-L}^{L} [(1/4)R^4 + z^2R^2] dz. \tag{8.84}$$

$$I = \rho\pi[(1/4)R^4 2L + (2/3)L^3R^2]. \tag{8.85}$$

Karena $\rho = M/(\pi R^2 2L)$ di mana $M \in \mathbb{R}^+$ adalah massa dari $C(R,L)$, maka

$$I = \frac{M\pi}{\pi R^2 2L}[(1/2)R^4L + (2/3)L^3R^2]. \tag{8.86}$$

$$I = (1/2)M[(1/2)R^2 + (2/3)L^2]. \tag{8.87}$$

Karena panjang $C(R,L)$ adalah $L' := 2L$, maka

$$I = (1/2)M[(1/2)R^2 + (1/6)L'^2] = (1/12)M(3R^2 + L'^2). \tag{8.88}$$

Inilah momen inersia yang dimaksud di atas.

8.16 Massa Tereduksi

Andaikan ada sistem dua partikel bermassa m_1 dan m_2 yang berturut-turut menempati posisi $\vec{r}_1$ dan $\vec{r}_2$ yang bergantung pada waktu t. Misalkan kedua partikel tersebut mengalami gaya aksi-reaksi berupa gaya sentral yang saling berlawanan, sehingga gaya yang dialami oleh partikel pertama adalah $\vec{F}_1 = m_1\ddot{\vec{r}}_1 = f(|\vec{r}|)\vec{r}/|\vec{r}|$, serta gaya yang dialami partikel kedua adalah $\vec{F}_2 = m_2\ddot{\vec{r}}_2 = -f(|\vec{r}|)\vec{r}/|\vec{r}|$, di mana $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah sebarang fungsi riil, dan $\vec{r} := \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ adalah posisi relatif partikel pertama terhadap partikel kedua. Oleh karena itu, $m_1m_2\ddot{\vec{r}}_1 = f(|\vec{r}|)m_2\vec{r}/|\vec{r}|$ dan $m_1m_2\ddot{\vec{r}}_2 = -f(|\vec{r}|)m_1\vec{r}/|\vec{r}|$, yang selisihnya adalah $m_1m_2\ddot{\vec{r}} = f(|\vec{r}|)(m_1+m_2)\vec{r}/|\vec{r}|$ sehingga $\mu\ddot{\vec{r}} = f(|\vec{r}|)\vec{r}/|\vec{r}|$ di mana $\boxed{\mu := m_1m_2/(m_1+m_2)}$ adalah massa tereduksi untuk sistem dua partikel tersebut.

8.17 Interaksi Gravitasi Partikel Bermassa dengan Partikel Tak Bermassa

Andaikan hanya ada dua buah partikel klasik non-relativistik di ruang fisis $\mathbb{R}^3$, serta hanya ada interaksi gravitasi antara keduanya. Partikel pertama bermassa

m_1 yang tidak nol dan terletak pada posisi $\vec{r}_1$ pada waktu t_1. Partikel kedua bermassa $m_2 = 0$ dan terletak pada posisi $\vec{r}_2$ pada waktu t. Selanjutnya akan dicari persamaan gerak kedua partikel tersebut.

Menurut hukum gravitasi Newton dan hukum kedua Newton, diperoleh

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \tag{8.89}$$

dan

$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = G\frac{m_2 m_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2). \tag{8.90}$$

Karena $m_2 = 0$, maka dari dua persamaan terakhir, diperoleh

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{0} \tag{8.91}$$

dan

$$\vec{0} = \vec{0}, \tag{8.92}$$

sehingga dua persamaan terakhir, diperoleh kesimpulan bahwa partikel pertama akan bergerak lurus beraturan, sedangkan partikel kedua boleh bergerak sebarang.

8.18 Persamaan Hamilton

Andaikan ada sebuah Lagrangian $L \mapsto (q, \dot{q}, t)$, di mana q adalah satu-satunya koordinat umum, t adalah waktu, dan $\dot{q} := dq/dt$, serta $q \mapsto t$ dan $\dot{q} \mapsto t$. Andaikan ada sebuah momentum umum p yang didefinisikan sebagai

$$p := \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)_{q,t}. \tag{8.93}$$

Tentu saja, $p \mapsto (q, \dot{q}, t)$, sehingga tentu saja $\dot{q} \mapsto (q, p, t)$.

Karena L memenuhi persamaan Euler-Lagrange, yaitu

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)_{q,t} = \left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)_{\dot{q},t}, \tag{8.94}$$

maka

$$\dot{p} = \left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)_{\dot{q},t}. \tag{8.95}$$

Tentu saja, $\dot{p} \mapsto (q, \dot{q}, t)$.

Andaikan ada sebuah Hamiltonian $H \mapsto (q, p, t)$, yang didefinisikan sebagai $H := \dot{q}p - L$.

Karena $L = L_{q,\dot{q},t}(q, \dot{q}_{q,p,t}(q, p, t), t)$, maka

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)_{p,t} = \left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial q}\right)_{p,t} p - \left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)_{p,t}. \tag{8.96}$$

Karena

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)_{p,t} = \left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)_{\dot{q},t} + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)_{q,t}\left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial q}\right)_{p,t}, \tag{8.97}$$

maka

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)_{p,t} = \left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial q}\right)_{p,t}\left(p - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)_{q,t}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)_{\dot{q},t} \tag{8.98}$$

sehingga

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)_{p,t} = -\dot{p}. \tag{8.99}$$

Demikian pula,

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_{q,t} = \left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial p}\right)_{q,t} p + \dot{q} - \left(\frac{\partial L}{\partial p}\right)_{q,t}. \tag{8.100}$$

Karena

$$\left(\frac{\partial L}{\partial p}\right)_{q,t} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)_{q,t}\left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial p}\right)_{q,t}, \tag{8.101}$$

maka

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_{q,t} = \left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial p}\right)_{q,t}\left(p - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)_{q,t}\right) + \dot{q} \tag{8.102}$$

sehingga

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_{q,t} = \dot{q}. \tag{8.103}$$

8.19 Lagrangian, Hamiltonian, dan Mamiltonian

Misalkan ada n buah koordinat umum $q^1, \cdots, q^n \in \mathbb{R}$, dan n buah momentum umum $p_1, \cdots, p_n \in \mathbb{R}$. Didefinisikan pula, $\dot{q}^i := dq^i/dt$ dan $\dot{p}_i := dp_i/dt$ untuk setiap $i \in \{1, \cdots, n\}$, di mana $t \in \mathbb{R}$ adalah waktu. Misalkan pula, ada sebuah Lagrangian $L \in \mathbb{R}$ yang bergantung secara eksplisit terhadap $(q^1, \cdots, q^n, \dot{q}^1, \cdots, \dot{q}^n, t)$ serta memenuhi persamaan

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = p_i \quad \text{dan} \quad \frac{\partial L}{\partial q^i} = \dot{p}_i \tag{8.104}$$

untuk setiap $i \in \{1, \cdots, n\}$.

Transformasi Legendre $H := \dot{q}^i p_i - L$ menghasilkan

$$dH = p_i d\dot{q}^i + \dot{q}^i dp_i - \dot{p}_i dq^i - p_i d\dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial t}dt \tag{8.105}$$

alias

$$dH = \dot{q}^i dp_i - \dot{p}_i dq^i - \frac{\partial L}{\partial t}dt \tag{8.106}$$

sehingga diperoleh

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}^i, \qquad \frac{\partial H}{\partial q^i} = -\dot{p}_i, \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{8.107}$$

untuk setiap $i \in \{1, \cdots, n\}$. Besaran H yang bergantung secara eksplisit terhadap $(q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n, t)$ ini biasa dikenal sebagai *Hamiltonian*.

Transformasi Legendre $M := q^i \dot{p}_i - L$ menghasilkan

$$dM = \dot{p}_i dq^i + q^i d\dot{p}_i - \dot{p}_i dq^i - p_i d\dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{8.108}$$

alias

$$dM = q^i d\dot{p}_i - p_i d\dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{8.109}$$

sehingga diperoleh

$$\frac{\partial M}{\partial \dot{p}_i} = q^i, \qquad \frac{\partial M}{\partial \dot{q}^i} = -p_i, \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial M}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{8.110}$$

untuk setiap $i \in \{1, \cdots, n\}$. Besaran M yang bergantung secara eksplisit terhadap $(\dot{q}^i, \cdots, \dot{q}^n, \dot{p}_1, \cdots, \dot{p}_n, t)$ ini saya sebut sebagai *Mamiltonian* yang merupakan istilah yang saya buat sendiri.

8.20 Peluang Keberadaan Partikel Klasik

Andaikan ada partikel titik bergerak bolak-balik sepanjang garis riil $\mathbb{R}$, misalnya sumbu-x, dengan posisi $x = A \sin(2\pi t/T)$ pada waktu $t \in \mathbb{R}$ di mana $A > 0$ dan $T > 0$. Ternyata, menurut perhitungan yang teliti, dapat disimpulkan beberapa kesimpulan berikut ini.

Peluang keberadaan partikel di daerah $0 < x < A$ adalah 1/2.

Peluang keberadaan partikel di daerah $0 < x < A/2$ adalah 1/6.

Peluang keberadaan partikel di daerah $A/2 < x < A$ adalah 1/3.

8.21 Rapat Peluang Keberadaan Partikel Klasik

Andaikan ada sebuah partikel klasik yang bergerak bolak-balik sepanjang garis riil $\mathbb{R}$ dengan posisi $x = A \sin(2\pi t/T)$, di mana $A, T \in \mathbb{R}^+$ berturut-turut adalah amplitudo dan periode getaran, dan $t \in \mathbb{R}$ adalah waktu. Tentu saja, $t = (T/2\pi) \arcsin(x/A)$. Rapat peluang keberadaan partikel klasik tersebut tentu saja adalah (di mana P adalah peluangnya)

$$\frac{dP}{dx} = \frac{2}{T}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx} \arcsin\frac{x}{A} = \frac{1}{\pi A}\frac{1}{\sqrt{1-(x/A)^2}} = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}. \tag{8.111}$$

Peluang untuk menemukan partikel pada interval $-A < x < A$ tentu saja adalah

$$\begin{aligned} P_x(A) - P_x(-A) &= \int_{-A}^{A} \frac{dP}{dx} dx = \frac{2}{T}(t_x(A) - t_x(-A)) \\ &= \frac{1}{\pi}(\arcsin 1 - \arcsin(-1)) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1 \end{aligned} \tag{8.112}$$

Peluang untuk menemukan partikel pada interval $0 < x < A$ tentu saja adalah

$$P_x(A)-P_x(0) = \int_0^A \frac{dP}{dx} dx = \frac{2}{T}(t_x(A)-t_x(0)) = \frac{1}{\pi}(\arcsin 1 - \arcsin 0) = \frac{1}{2}. \tag{8.113}$$

Peluang untuk menemukan partikel pada interval $0 < x < A/2$ tentu saja adalah

$$P_x(A/2)-P_x(0) = \int_0^{A/2} \frac{dP}{dx} dx = \frac{2}{T}(t_x(A/2)-t_x(0)) = \frac{1}{\pi}(\arcsin(1/2)-\arcsin 0) = \frac{1}{6}. \tag{8.114}$$

Peluang untuk menemukan partikel pada interval $A/2 < x < A$ tentu saja adalah

$$\begin{aligned} P_x(A) - P_x(A/2) &= \int_{A/2}^{A} \frac{dP}{dx} dx = \frac{2}{T}(t_x(A) - t_x(A/2)) \\ &= \frac{1}{\pi}(\arcsin 1 - \arcsin(1/2)) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3}. \end{aligned} \tag{8.115}$$

Demikianlah ini sesuai yang diharapkan bahwa $1/2 + 1/6 + 1/3 = 1$.

8.22 Menentukan Lagrangian Sistem jika Diketahui Persamaan Geraknya

Persamaan gerak Euler-Lagrange tanpa kendala untuk gerak satu-dimensi pada garis riil $\mathbb{R}$ adalah

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial L}{\partial z} \tag{8.116}$$

di mana $L \in \mathbb{R}$ adalah Lagrangian (yang berdimensi tenaga) yang bergantung pada posisi $z \in \mathbb{R}$, kecepatan $\dot{z} := dz/dt$, dan waktu $t \in \mathbb{R}$.

Secara umum, L dapat ditulis sebagai sebuah deret pangkat, yaitu

$$L = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} \alpha_{ijk} z^i \dot{z}^j t^k \tag{8.117}$$

di mana $\alpha_{ijk} \in \mathbb{R}$ adalah sebuah tetapan untuk setiap $i, j, k \in \mathbb{N}_0$.

Oleh karena itu,

$$\sum_{i,j,k=0}^{\infty} \alpha_{ijk} \frac{d}{dt}(j z^i \dot{z}^{j-1} t^k) = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} \alpha_{ijk} i z^{i-1} \dot{z}^j t^k \tag{8.118}$$

alias

$$\sum_{i,j,k=0}^{\infty} \alpha_{ijk}(jiz^{i-1}\dot{z}^j t^k + j(j-1)z^i\dot{z}^{j-2}\ddot{z}t^k + jkz^i\dot{z}^{j-1}t^{k-1}) = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} \alpha_{ijk}iz^{i-1}\dot{z}^j t^k \quad (8.119)$$

di mana $\ddot{z} := d\dot{z}/dt$. Inilah persamaan gerak sistem jika diketahui Lagrangian yang telah disebutkan sebelumnya.

Selanjutnya, akan dibicarakan contoh kongkretnya.

Persamaan gerak sebuah batu yang melambung vertikal ke atas dengan posisi $(0,0,z)$ akibat pengaruh percepatan gravitasi $\vec{g} := (0,0,-g)$, di mana $g \in \mathbb{R}^+$ adalah sebuah tetapan, adalah

$$\ddot{z} = -g \quad \text{alias} \quad m\ddot{z} = -mg \quad (8.120)$$

di mana $m \in \mathbb{R}^+$ adalah massa batu tersebut. Dengan membandingkan persamaan terakhir dengan persamaan gerak sistem secara umum, diperoleh

$$2\alpha_{020}\ddot{z} = \alpha_{100} - \alpha_{011} \quad (8.121)$$

sehingga otomatis

$$2\alpha_{020} = m \quad \text{dan} \quad \alpha_{100} - \alpha_{011} = -mg \quad (8.122)$$

alias

$$\alpha_{020} = (1/2)m \quad \text{dan} \quad \alpha_{011} = mg + \alpha_{100} \quad (8.123)$$

sehingga

$$L = (1/2)m\dot{z}^2 + \alpha_{100}z + (mg + \alpha_{100})\dot{z}t \quad (8.124)$$

yang lebih umum daripada Lagrangian yang biasa dipakai. Apabila Lagrangian L ini dimasukkan ke dalam persamaan Euler-Lagrange tadi, maka kita peroleh $\ddot{z} = -g$. Secara khusus, substitusi $\alpha_{100} = -mg$ menghasilkan

$$L = (1/2)m\dot{z}^2 - mgz \quad (8.125)$$

yang biasa dikenal.

Contoh selanjutnya adalah getaran selaras tak teredam, yaitu

$$m\ddot{z} = -kz \quad (8.126)$$

di mana $k \in \mathbb{R}^+$ adalah tetapan pegas. Dengan membandingkan persamaan terakhir dengan persamaan gerak sistem secara umum, diperoleh

$$2\alpha_{020}\ddot{z} = (2\alpha_{200} - \alpha_{111})z \quad (8.127)$$

sehingga otomatis

$$2\alpha_{020} = m \quad \text{dan} \quad 2\alpha_{200} - \alpha_{111} = -k \quad (8.128)$$

alias

$$\alpha_{020} = (1/2)m \quad \text{dan} \quad \alpha_{111} = k + 2\alpha_{200} \quad (8.129)$$

sehingga

$$L = (1/2)m\dot{z}^2 + \alpha_{200}z^2 + (k + 2\alpha_{200})z\dot{z}t \quad (8.130)$$

yang lebih umum daripada Lagrangian yang biasa dipakai. Apabila Lagrangian L ini dimasukkan ke dalam persamaan Euler-Lagrange tadi, maka kita peroleh $m\ddot{z} = -kz$. Secara khusus, substitusi $\alpha_{200} = -(1/2)k$ menghasilkan

$$L = (1/2)m\dot{z}^2 - (1/2)kz^2 \quad (8.131)$$

yang biasa dikenal.

8.23 Pemuaian Panjang Infinitesimal

Sebuah logam yang berbentuk batangan lurus dengan panjang mula-mula L_0 yang dipanaskan dari suhu T_0 sampai suhu T akan bertambah panjang sehingga panjangnya menjadi L sedemikian

$$\Delta L := L - L_0 = \alpha L_0 (T - T_0) \tag{8.132}$$

alias

$$L = L_0(1 + \alpha \Delta T) \tag{8.133}$$

di mana α adalah koefisien muai panjang, dan $\Delta T := T - T_0$.

Apabila ΔT infinitesimal kecil, yaitu bahwa $\Delta T = dT$, maka bolehlah L bergantung pada T sehingga

$$L_T(T + dT) = L + L\alpha\, dT \tag{8.134}$$

alias

$$dL = L\alpha\, dT \tag{8.135}$$

alias

$$dL/L = \alpha\, dT \tag{8.136}$$

yang diintegralkan menjadi

$$\ln(L/L_0) = \alpha T \tag{8.137}$$

alias

$$L = L_0 e^{\alpha T} \tag{8.138}$$

di mana $L_0 := L_T(0)$ adalah panjang batang logam pada saat suhu nol mutlak Kelvin.

8.24 Kecepatan Fase dan Kecepatan Grup Gelombang Partikel Relativistik

Andaikan di ruang $\mathbb{R}$ ada dua buah gelombang satu-dimensi yang berbeda tipis dalam bilangan gelombang $k \in \mathbb{R}$ dan frekuensi sudut gelombang $\omega \in \mathbb{R}$, tetapi amplitudo $A \in \mathbb{R}^+$ keduanya sama, yaitu

$$\Psi_1 := A\cos(kx - \omega t) \in \mathbb{R} \tag{8.139}$$

dan

$$\Psi_2 := A\cos[(k + dk)x - (\omega + d\omega)t] \in \mathbb{R} \tag{8.140}$$

di mana $x \in \mathbb{R}$ adalah posisi 1-dimensi dan $t \in \mathbb{R}$ adalah waktu.

Superposisi kedua gelombang tadi adalah

$$\Psi := \Psi_1 + \Psi_2. \tag{8.141}$$

Dalam trigonometri ada identitas

$$\begin{aligned} \cos\alpha + \cos\beta &= \cos[\frac{1}{2}(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}(\alpha-\beta)] + \cos[\frac{1}{2}(\alpha+\beta) - \frac{1}{2}(\alpha-\beta)] \\ &= 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) \end{aligned} \tag{8.142}$$

sehingga

$$\Psi = 2A\cos\frac{1}{2}[(2k+dk)x-(2\omega+d\omega)t]\cos\frac{1}{2}(dk\,x-d\omega\,t). \tag{8.143}$$

Karena dk dan $d\omega$ itu mendekati nol, maka persamaan terakhir hampir sama dengan

$$\Psi = 2A\cos(kx-\omega t)\cos\frac{1}{2}(dk\,x-d\omega\,t). \tag{8.144}$$

Dengan demikian superposisi tersebut menghasilkan grup gelombang yang termodulasi.

Kecepatan fase dari Ψ tersebut adalah $v_{\mathrm{ph}} := \omega/k$, sedangkan kecepatan grup dari Ψ tersebut adalah $v_{\mathrm{gr}} := d\omega/dk$.

Andaikan gerak gelombang tersebut mewakili gerak sebuah partikel bermassa rehat $m_0 \in \mathbb{R}^+$. Tenaga relativistik partikel tersebut tentu saja adalah

$$E = \hbar\omega = m_0c^2\gamma \tag{8.145}$$

di mana $\hbar$ adalah tetapan Planck tereduksi, c adalah kelajuan cahaya dalam ruang hampa, $\gamma := 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$, dan v adalah kecepatan 1-dimensi dari partikel tersebut, sehingga

$$\omega = m_0c^2\gamma/\hbar. \tag{8.146}$$

Momentum linier partikel tersebut tentu saja adalah

$$p = \hbar k = m_0v\gamma \tag{8.147}$$

sehingga

$$k = m_0v\gamma/\hbar. \tag{8.148}$$

Tentu saja kecepatan fase dari Ψ adalah

$$v_{\mathrm{ph}} = \omega/k = c^2/v \tag{8.149}$$

yang nilainya tak kurang dari c.

Kecepatan grup dari Ψ tentu saja adalah

$$v_{\mathrm{gr}} = d\omega/dk = (d\omega/dv)/(dk/dv). \tag{8.150}$$

$$\frac{d\omega}{dv} = \frac{m_0c^2}{\hbar}\frac{d\gamma}{dv}. \tag{8.151}$$

$$\frac{d\gamma}{dv} = -\frac{1}{2}\gamma^3\left(-2\frac{v}{c^2}\right) = \gamma^3\frac{v}{c^2} \tag{8.152}$$

sehingga

$$\frac{d\omega}{dv} = \frac{m_0c^2}{\hbar}\gamma^3\frac{v}{c^2} = \frac{m_0}{\hbar}v\gamma^3. \tag{8.153}$$

$$\begin{aligned}\frac{dk}{dv} &= \frac{m_0}{\hbar}\left(\gamma+v\frac{d\gamma}{dv}\right) = \frac{m_0}{\hbar}\left(\gamma+\frac{v^2}{c^2}\gamma^3\right)\\ &= \frac{m_0}{\hbar}\gamma\left(1+\frac{v^2}{c^2}\gamma^2\right) = \frac{m_0}{\hbar}\gamma[1+(1-\gamma^{-2})\gamma^2]\\ &= m_0\gamma^3/\hbar \end{aligned} \tag{8.154}$$

sehingga kecepatan grup dari Ψ adalah $v_{\mathrm{gr}} = v$ yang nilainya tak lebih dari c.

8.25 Efek Compton

Andaikan di ruang $\mathbb{R}^2$ ada sebuah gelombang cahaya yang merambat lurus dan menabrak sebuah elektron yang bermassa rehat $m_0 \in \mathbb{R}^+$ yang mula-mula berada dalam keadaan diam. Momentum linier dari gelombang cahaya tersebut sebelum menabrak elektron tersebut adalah

$$\vec{p}_l := (h/\lambda)(1,0) \in \mathbb{R}^2, \tag{8.155}$$

sedangkan momentum linier gelombang cahaya tersebut setelah menabrak elektron tersebut adalah $\vec{p}_l{}' := (h/\lambda')(\cos\phi, -\sin\phi) \in \mathbb{R}^2$, di mana h adalah tetapan Planck, λ adalah panjang gelombang cahaya tersebut sebelum menabrak elektron tersebut, dan λ' adalah panjang gelombang cahaya tersebut setelah menabrak elektron tersebut. Momentum linier elektron setelah ditabrak oleh gelombang cahaya tersebut adalah $\vec{p}_e := p(\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{R}^2$. Di ruang $\mathbb{R}^2$, elektron tersebut terpental yang kecepatannya membentuk sudut datar $\theta \in \mathbb{R}$ terhadap arah kecepatan gelombang cahaya mula-mula, sedangkan gelombang cahaya tersebut juga terpental yang kecepatannya membentuk sudut datar $\phi \in \mathbb{R}$ terhadap arah kecepatan gelombang cahaya mula-mula. Dari hukum kelestarian momentum linier dan dengan menguraikan kedua komponen tegak lurus dari arah momentum linier gelombang cahaya dan elektron sebelum dan sesudah tumbukan, maka diperoleh

$$h/\lambda = p\cos\theta + (h/\lambda')\cos\phi \tag{8.156}$$

dan

$$p\sin\theta = (h/\lambda')\sin\phi \tag{8.157}$$

sehingga

$$p\cos\theta = h\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\cos\phi\right) \tag{8.158}$$

sehingga

$$p^2\cos^2\theta = h^2\left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda'^2}\cos^2\phi - \frac{2}{\lambda\lambda'}\cos\phi\right), \tag{8.159}$$

padahal

$$p^2\sin^2\theta = \frac{h^2}{\lambda'^2}\sin^2\phi \tag{8.160}$$

sehingga dengan memanfaatkan identitas trigonometri, yaitu $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, diperoleh

$$p^2 = h^2\left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda'^2} - \frac{2}{\lambda\lambda'}\cos\phi\right). \tag{8.161}$$

Tenaga kinetik T elektron tersebut diberikan oleh gelombang cahaya tersebut sehingga

$$\begin{aligned} T &= h(\nu - \nu') = hc(1/\lambda - 1/\lambda') \\ &= \sqrt{(pc)^2 + (m_0c^2)^2} - m_0c^2 \end{aligned} \tag{8.162}$$

di mana ν (ν') adalah frekuensi gelombang cahaya tersebut sebelum (setelah) menabrak elektron tersebut, dan c adalah kelajuan cahaya dalam ruang hampa.

Oleh karena itu,

$$hc(1/\lambda - 1/\lambda') + m_0 c^2 = \sqrt{(pc)^2 + (m_0 c^2)^2} \tag{8.163}$$

yang kedua ruas dikuadratkan menjadi

$$\begin{aligned} & h^2 c^2 \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda'^2} - \frac{2}{\lambda\lambda'} \right) + (m_0 c^2)^2 + 2h m_0 c^3 \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) \\ = \ & h^2 c^2 \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda'^2} - \frac{2}{\lambda\lambda'} \cos\phi \right) + (m_0 c^2)^2 \end{aligned} \tag{8.164}$$

alias

$$-\frac{2}{\lambda\lambda'} + \frac{2m_0 c}{h} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) = -\frac{2}{\lambda\lambda'} \cos\phi \tag{8.165}$$

alias

$$-1 + (m_0 c/h)(\lambda' - \lambda) = -\cos\phi \tag{8.166}$$

alias

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\phi). \tag{8.167}$$

Skalar $\lambda_C := h/(m_0 c)$ ini biasa disebut sebagai panjang gelombang Compton.

8.26 Bagian Riil dan Imajiner dari Persamaan Schrödinger

Persamaan Schrödinger secara umum adalah

$$\hat{H}\Psi = i\hbar \partial\Psi/\partial t \tag{8.168}$$

di mana $i^2 = -1$, $\hat{H}$ adalah operator variabel Hamiltonian yang bergantung pada vektor posisi $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ saja, $\Psi \in \mathbb{C}$ adalah variabel gelombang kemungkinan yang bergantung pada posisi $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ dan waktu $t \in \mathbb{R}$, serta $\hbar$ adalah tetapan Planck tereduksi yang riil.

Persamaan Schrödinger tersebut sebenarnya merupakan dua buah persamaan diferensial riil, yaitu

$$\hat{H}\,\mathrm{Re}\,\Psi = -\hbar \partial(\mathrm{Im}\,\Psi)/\partial t \tag{8.169}$$

dan

$$\hat{H}\,\mathrm{Im}\,\Psi = \hbar \partial(\mathrm{Re}\,\Psi)/\partial t. \tag{8.170}$$

Jadi, sesungguhnya, sebuah persamaan Schrödinger itu merupakan sistem persamaan yang terdiri dari dua buah persamaan diferensial dengan dua buah variabel riil, yaitu $\mathrm{Re}\,\Psi$ dan $\mathrm{Im}\,\Psi$ yang harus dicari.

8.27 Laju Nilai Harap Besaran Fisis

Andaikan ada sebuah besaran fisis $Q(x,p,t) \in \mathbb{R}$ yang bergantung pada posisi $x \in \mathbb{R}$, momentum linier $p \in \mathbb{R}$, dan waktu $t \in \mathbb{R}$, yang diwakili oleh operator linier $\hat{Q}$ yang Hermitean dan hanya bergantung pada waktu t. Andaikan ada ket keadaan kuantum $|\psi\rangle$ yang normal, yaitu bahwa $\|\psi\|^2 = \langle\psi|\psi\rangle = 1$, dan hanya bergantung pada t, serta memenuhi persamaan Schrodinger, yaitu $\hat{H}|\psi\rangle = i\hbar(d/dt)|\psi\rangle$, di mana $\hat{H}$ adalah operator Hamiltonian. Didefinisikan pula $\langle x|\psi\rangle := \psi(x)$ dan $\langle p|\psi\rangle := \tilde{\psi}(p)$ di mana $\tilde{\psi}$ adalah transformasi Fourier dari ψ. Di sini, $\langle p|\hat{Q}|x\rangle = Q(x,p,t)$.

Oleh karena itu, laju nilai harap dari Q adalah

$$\frac{d}{dt}\langle Q\rangle_\psi = \frac{d}{dt}(\langle\psi|\hat{Q}|\psi\rangle) = \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} dp\,dx\langle\psi|p\rangle\langle p|\hat{Q}|x\rangle\langle x|\psi\rangle$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} dp\,dx\left(\frac{\partial}{\partial t}(\langle\psi|p\rangle)\langle p|\hat{Q}|x\rangle\langle x|\psi\rangle + \langle\psi|p\rangle\frac{\partial}{\partial t}(\langle p|\hat{Q}|x\rangle)\langle x|\psi\rangle + \langle\psi|p\rangle\langle p|\hat{Q}|x\rangle\frac{\partial}{\partial t}(\langle x|\psi\rangle)\right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} dp\,dx\left(\left(\frac{d}{dt}|\psi\rangle\right)^\dagger |p\rangle\langle p|\hat{Q}|x\rangle\langle x|\psi\rangle + \langle\psi|p\rangle\langle p|\frac{d\hat{Q}}{dt}|x\rangle\langle x|\psi\rangle + \langle\psi|p\rangle\langle p|\hat{Q}|x\rangle\langle x|\frac{d}{dt}|\psi\rangle\right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} dp\,dx\left(\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}|\psi\rangle\right)^\dagger |p\rangle\langle p|\hat{Q}|x\rangle\langle x|\psi\rangle + \langle\psi|p\rangle\langle p|\frac{d\hat{Q}}{dt}|x\rangle\langle x|\psi\rangle - \frac{i}{\hbar}\langle\psi|p\rangle\langle p|\hat{Q}|x\rangle\langle x|\hat{H}|\psi\rangle\right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} dp\,dx\left(\frac{i}{\hbar}\langle\psi|\hat{H}|p\rangle\langle p|\hat{Q}|x\rangle\langle x|\psi\rangle + \langle\psi|p\rangle\langle p|\frac{d\hat{Q}}{dt}|x\rangle\langle x|\psi\rangle - \frac{i}{\hbar}\langle\psi|p\rangle\langle p|\hat{Q}|x\rangle\langle x|\hat{H}|\psi\rangle\right)$$

$$= \frac{i}{\hbar}\langle\psi|(\hat{H}\hat{Q} - \hat{Q}\hat{H})|\psi\rangle + \langle\psi|\frac{d\hat{Q}}{dt}|\psi\rangle.$$

Oleh karena itu,

$$\frac{d}{dt}\langle Q\rangle_\psi = \frac{i}{\hbar}\langle\psi|[\hat{H},\hat{Q}]|\psi\rangle + \langle\psi|\frac{d\hat{Q}}{dt}|\psi\rangle \tag{8.171}$$

di mana didefinisikan komutasi $[\hat{H},\hat{Q}] := \hat{H}\hat{Q} - \hat{Q}\hat{H}$.

Untuk menghitung $\langle\psi|(d\hat{Q}/dt)|\psi\rangle$, dapat dilakukan penguraian, yaitu

$$\begin{aligned}\langle\psi|\frac{d\hat{Q}}{dt}|\psi\rangle &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} dp\,dx\langle\psi|p\rangle\frac{\partial}{\partial t}(\langle p|\hat{Q}|x\rangle)\langle x|\psi\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} dp\,dx\tilde{\psi}^*(p)\frac{\partial Q(x,p,t)}{\partial t}\psi(x).\end{aligned} \tag{8.172}$$

Untuk mencari $\tilde{\psi}(p)$, dapat dilakukan penguraian, yaitu

$$\tilde{\psi}(p) = \langle p|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dx\langle p|x\rangle\langle x|\psi\rangle. \tag{8.173}$$

Untuk mencari $\langle p|x\rangle$, dapat dilakukan penguraian dengan tambahan posisi lain $x' \in \mathbb{R}$, yaitu

$$\langle x'|x\rangle = \int_{\mathbb{R}} dp\langle x'|p\rangle\langle p|x\rangle \tag{8.174}$$

yang harus sama dengan delta Dirac $\delta(x-x')$, sehingga

$$\langle x'|x\rangle = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\mathbb{R}} dp e^{ip(x-x')/\hbar}, \tag{8.175}$$

sehingga haruslah

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}. \tag{8.176}$$

8.28 Pembuktian Teorema Ehrenfest

Laju nilai harap sebuah besaran fisis $\Omega \in \mathbb{R}$ pada swa-keadaan $|\psi\rangle$ anggota ruang Hilbert kompleks $\mathcal{H}$ secara kuantum pada waktu $t \in \mathbb{R}$ adalah

$$\frac{d\langle\Omega\rangle_\psi}{dt} = \frac{i}{\hbar}\langle\psi|[\hat{H},\hat{\Omega}]|\psi\rangle + \langle\psi|\frac{d\hat{\Omega}}{dt}|\psi\rangle \tag{8.177}$$

di mana $\langle\Omega\rangle_\psi \equiv \langle\psi|\hat{\Omega}|\psi\rangle$, $i := \sqrt{-1}$, $\hbar \in \mathbb{R}^+$ adalah tetapan Planck tereduksi, $[\hat{H},\hat{\Omega}] := \hat{H}\hat{\Omega} - \hat{\Omega}\hat{H}$, $\hat{H}$ adalah operator Hamiltonian, dan $\hat{\Omega}$ adalah operator dari besaran fisis Ω.

Apabila $\hat{H} := \hat{T} + \hat{V}$ di mana $\hat{T} := \sum_{j=1}^{3} \hat{p}_j^2/(2m)$, $m \in \mathbb{R}^+$ adalah massa partikel kuantum, $\hat{V} := \sum_{k,l,n=0}^{\infty}(1/(k!l!n!))V_{kln}(0,0,0)\hat{x}_1^k\hat{x}_2^l\hat{x}_3^n$, $V \in \mathbb{R}$ adalah tenaga potensial yang bergantung pada posisi $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$V_{kln}(0,0,0) := \lim_{x_1\to 0}\lim_{x_2\to 0}\lim_{x_3\to 0}\frac{\partial^{k+l+n}V}{\partial x_1^k \partial x_2^l \partial x_3^n}, \tag{8.178}$$

dan $\hat{x}_k$ adalah operator posisi yang mewakili posisi x_k untuk setiap $k \in \{1,2,3\}$.

Oleh karena itu,

$$\frac{d\langle\vec{p}\rangle_\psi}{dt} = \frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{3}\langle\psi|[\hat{H},\hat{p}_j]|\psi\rangle\vec{n}_j + \langle\psi|\frac{d\hat{\vec{p}}}{dt}|\psi\rangle \tag{8.179}$$

di mana $\vec{n}_1 := (1,0,0)$, $\vec{n}_2 := (0,1,0)$, dan $\vec{n}_3 := (0,0,1)$.

Selanjutnya,

$$\frac{d\langle\vec{p}\rangle_\psi}{dt} = \frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k,l,n=0}^{\infty}\frac{1}{k!l!n!}V_{kln}(0,0,0)\langle\psi|[\hat{x}_1^k\hat{x}_2^l\hat{x}_3^n,\hat{p}_j]|\psi\rangle\vec{n}_j \tag{8.180}$$

Karena

$$[\hat{x}_1^k\hat{x}_2^l\hat{x}_3^n,\hat{p}_j] = i\hbar(k\delta_{1j}\hat{x}_1^{k-1}\hat{x}_2^l\hat{x}_3^n + l\delta_{2j}\hat{x}_1^k\hat{x}_2^{l-1}\hat{x}_3^n + n\delta_{3j}\hat{x}_1^k\hat{x}_2^l\hat{x}_3^{n-1}), \tag{8.181}$$

maka

$$\frac{d\langle\vec{p}\rangle_\psi}{dt} = -\langle\psi|\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\vec{n}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\vec{n}_2 + \frac{\partial V}{\partial x_3}\vec{n}_3\right)|\psi\rangle \tag{8.182}$$

sehingga

$$\frac{d\langle\vec{p}\rangle_\psi}{dt} = -\langle\psi|\nabla V|\psi\rangle = \left\langle\vec{F}\right\rangle_\psi. \quad (8.183)$$

Dengan cara yang sama, kita peroleh

$$\frac{d\langle\vec{r}\rangle_\psi}{dt} = \frac{i}{\hbar}\frac{1}{2m}\sum_{j,k=1}^{3}\langle\psi|[\hat{p}_j^2,\hat{x}_k]|\psi\rangle\,\vec{n}_k. \quad (8.184)$$

Karena $[\hat{p}_j^2,\hat{x}_k] = -2i\hbar\delta_{jk}\hat{p}_j$, maka

$$\frac{d\langle\vec{r}\rangle_\psi}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{j,k=1}^{3}\langle\psi|\delta_{jk}\hat{p}_j|\psi\rangle\,\vec{n}_k \quad (8.185)$$

alias

$$\frac{d\langle\vec{r}\rangle_\psi}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{3}\langle\psi|\hat{p}_j|\psi\rangle\,\vec{n}_j \quad (8.186)$$

alias

$$\frac{d\langle\vec{r}\rangle_\psi}{dt} = \frac{\langle\psi|\hat{\vec{p}}|\psi\rangle}{2m} = \frac{\langle\vec{p}\rangle_\psi}{m}. \quad (8.187)$$

8.29 Dinamika Gelombang Kebolehjadian

Gelombang kebolehjadian $\Psi \in \mathbb{C}$ diatur oleh persamaan Schrodinger $\hat{H}\Psi = i\hbar\partial\Psi/\partial t$, di mana $\hat{H}$ merupakan operator variabel Hamiltonian yang bergantung pada posisi 1-dimensi $x \in \mathbb{R}$, $i := \sqrt{-1}$ adalah bilangan khayal satuan, $\hbar$ adalah tetapan Planck tereduksi, dan $t \in \mathbb{R}$ adalah waktu.

Andaikan dimisalkan $\Psi := \psi\tau$ di mana $\psi \in \mathbb{C}$ bergantung pada x, dan $\tau \in \mathbb{C}$ hanya bergantung pada t. Persamaan $\hat{H}\Psi = i\hbar\partial\Psi/\partial t$ menjadi $\tau\hat{H}\psi = i\hbar\psi d\tau/dt$ alias $(1/\psi)\hat{H}\psi = i\hbar(1/\tau)d\tau/dt = E$ di mana $E \in \mathbb{R}$ adalah tetapan pemisahan, dengan alasan bahwa ruas kiri persamaan terakhir hanya bergantung pada x dan ruas kanan persamaan terakhir hanya bergantung pada t sehingga kedua ruas persamaan terakhir haruslah merupakan tetapan, yang dimisalkan sebagai E. Oleh karena itu, $\hat{H}\psi = E\psi$ dan $d\tau/\tau = -(i/\hbar)E\,dt$ alias $\ln(\tau/\tau_0) = -(i/\hbar)Et$ alias $\tau = \tau_0 e^{-iEt/\hbar}$ di mana $\tau_0 = \tau_t(0)$ adalah nilai τ ketika $t = 0$. Dalam hal ini, ψ adalah penyelesaian persamaan swa-nilai $\hat{H}\psi = E\psi$. Besaran ψ dan E dapat bersifat diskrit maupun kontinyu.

Sekarang, Ψ akan dinyatakan ke dalam bentuk yang lebih umum, yaitu

$$\Psi = \int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}\psi e^{-iEt/\hbar}dE \quad (8.188)$$

di mana $\tilde{\psi} \in \mathbb{C}$ merupakan koefisien kombinasi linier yang hanya bergantung pada E, dan kali ini ψ bergantung pada x dan E, sehingga dengan demikian Ψ bergantung pada x dan t.

Oleh karena itu,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi\psi^*_{x,E}(x,E')dx = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi\psi^*_{x,E}(x,E')dx e^{-iEt/\hbar} dE. \tag{8.189}$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iE't/\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi\psi^*_{x,E}(x,E')dx\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi\psi^*_{x,E}(x,E')dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(E'-E)t/\hbar} dt\,dE \\ = 2\pi\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi\psi^*_{x,E}(x,E')dx\,\delta(E'-E)dE &= 2\pi\hbar\tilde{\psi}_E(E') \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{x,E}(x,E')|^2 dx.\end{aligned} \tag{8.190}$$

Karena ψ ternormalisasi, yaitu bahwa $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1$, maka

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iE't/\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi\psi^*_{x,E}(x,E')dx\,dt = 2\pi\hbar\tilde{\psi}_E(E') \tag{8.191}$$

sehingga dengan mengganti E' dengan E diperoleh

$$\tilde{\psi} = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iEt/\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi\psi^* \,dx\,dt. \tag{8.192}$$

Dengan demikian diperoleh dinamika gelombang kebolehjadian.

8.30 Mekanika Kuantum Relatif

Pada kesempatan ini, saya hendak menerangkan pengertian mekanika kuantum relatif.

Mekanika kuantum relatif yang dimaksud di sini berbeda dalam hal konseptual dengan mekanika kuantum relativistik. Yang dimaksud dengan mekanika kuantum relatif adalah bahwa persamaan gerak Schrodinger itu bersifat relatif, yaitu bahwa partikel yang mana yang dianggap bersifat probabilistik yang diwakili oleh gelombang kebolehjadian relatif milik partikel tertentu.

Berikut ini adalah contoh kongkretnya.

Andaikan di ruang hampa $\mathbb{R}^3$ hanya ada dua buah partikel, yaitu proton dan elektron yang berinteraksi listrik statik Coulomb.

Persamaan Schrodinger non-relativistik yang menganggap elektron bersifat probabilistik terhadap proton adalah

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\nabla_e^2\Psi_e - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}_e - \vec{r}_p|}\Psi_e = i\hbar\frac{\partial\Psi_e}{\partial t} \tag{8.193}$$

di mana $\hbar$ adalah tetapan Planck tereduksi, m_e adalah massa elektron, $\nabla_e := \partial/\partial\vec{r}_e$ adalah operator vektor gradien milik elektron, $\vec{r}_e, \vec{r}_p \in \mathbb{R}^3$ berturut-turut adalah posisi elektron dan proton, $\Psi_e \in \mathbb{C}$ adalah gelombang kebolehjadian elektron yang bergantung pada $\vec{r}_e$ dan waktu t, e adalah muatan satu buah proton, dan ϵ_0 adalah permitivitas listrik dalam ruang hampa.

Persamaan Schrodinger non-relativistik yang menganggap proton bersifat probabilistik terhadap elektron adalah

$$-\frac{\hbar^2}{2m_p}\nabla_p^2\Psi_p - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}_p - \vec{r}_e|}\Psi_p = i\hbar\frac{\partial\Psi_p}{\partial t} \tag{8.194}$$

di mana $\hbar$ adalah tetapan Planck tereduksi, m_p adalah massa proton, $\nabla_p := \partial/\partial\vec{r}_p$ adalah operator vektor gradien milik proton, $\vec{r}_e, \vec{r}_p \in \mathbb{R}^3$ berturut-turut adalah posisi elektron dan proton, $\Psi_p \in \mathbb{C}$ adalah gelombang kebolehjadian proton yang bergantung pada $\vec{r}_p$ dan waktu t, e adalah muatan satu buah proton, dan ϵ_0 adalah permitivitas listrik dalam ruang hampa.

Dengan demikian, mekanika kuantum bersifat relatif.

8.31 Swa-Nilai Operator Spin pada Partikel yang Dipengaruhi oleh Medan Magnet dengan Arah Tertentu

Misalkan di ruang $\mathbb{R}^3$ ada sebuah medan magnet seragam $\vec{B} := B_0\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ di mana $B_0 \in \mathbb{R}$ dan $\vec{n} := \vec{B}/|\vec{B}| = (n_x, n_y, n_z) \in \mathbb{R}^3$ adalah vektor satuan. Misalkan pula ada partikel kuantum yang dipengaruhi oleh $\vec{B}$ tersebut yang diwakili oleh fungsi gelombang $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ yang apabila dikenai operator vektor momentum sudut spin $\hat{\vec{S}} := (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z) : C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ memiliki swa-nilai sedemikian rupa sehingga

$$\vec{n}\cdot\hat{\vec{S}}\psi = \vec{n}\cdot\vec{S}\psi \quad \text{dan} \quad |\hat{\vec{S}}|^2\psi = |\vec{S}|^2\psi \tag{8.195}$$

sedemikian $\vec{n}\cdot\vec{S} = m_s\hbar$ dan $|\vec{S}|^2 = s(s+1)\hbar^2$, di mana $s \in (1/2)\mathbb{N}$ adalah bilangan kuantum spin, $m_l \in \{-s, -s+1, -s+2, \cdots, s-2, s-1, s\}$ adalah bilangan kuantum magnetik spin, dan $\hbar$ adalah tetapan Planck tereduksi. Oleh karena itu,

$$n_xS_x + n_yS_y + n_zS_z = m_s\hbar \quad \text{dan} \quad S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = s(s+1)\hbar^2 \tag{8.196}$$

sehingga melalui proses parameterisasi, diperoleh

$$S_x = \hbar\sqrt{s(s+1)}\sin\theta\cos\phi, \tag{8.197}$$

$$S_y = \hbar\sqrt{s(s+1)}\sin\theta\sin\phi, \tag{8.198}$$

$$S_z = \hbar\sqrt{s(s+1)}\cos\theta, \tag{8.199}$$

di mana $\theta, \phi \in \mathbb{R}$. Selanjutnya,

$$(n_x\cos\phi + n_y\sin\phi)\sin\theta + n_z\cos\theta = m_s/\sqrt{s(s+1)} \tag{8.200}$$

alias

$$\sqrt{n_z^2 + (n_x\cos\phi + n_y\sin\phi)^2}\cos[\theta - \arctan_2(n_z, n_x\cos\phi + n_y\sin\phi)] = m_s/\sqrt{s(s+1)} \tag{8.201}$$

alias

$$\begin{aligned}\theta &= 2n\pi + \arctan_2(n_z, n_x\cos\phi + n_y\sin\phi)\\ &\quad \pm \arccos[m_s/(\sqrt{s(s+1)}\sqrt{n_z^2 + (n_x\cos\phi + n_y\sin\phi)^2})] =: \theta_\phi \end{aligned} \quad (8.202)$$

di mana n adalah bilangan bulat. Oleh karena itu, nilai S_x, S_y, S_z adalah

$$S_x = \hbar\sqrt{s(s+1)}\sin\theta_\phi\cos\phi, \quad (8.203)$$

$$S_y = \hbar\sqrt{s(s+1)}\sin\theta_\phi\sin\phi, \quad (8.204)$$

$$S_z = \hbar\sqrt{s(s+1)}\cos\theta_\phi. \quad (8.205)$$

Apabila $\vec{n} = (0,0,1)$, maka diperoleh

$$S_x = \pm\hbar\sqrt{s(s+1) - m_s^2}\cos\phi, \quad (8.206)$$

$$S_y = \pm\hbar\sqrt{s(s+1) - m_s^2}\sin\phi, \quad (8.207)$$

$$S_z = \hbar m_s, \quad (8.208)$$

sesuai yang diharapkan.

8.32 Pengkuantuman Suatu Observabel Fisis

Andaikan ada sebuah observabel fisis yang berbentuk

$$Q := \sum_{j=1}^{n} \zeta_j p_j + \eta \quad (8.209)$$

di mana $Q, \zeta_1, \cdots, \zeta_n, q_1, \cdots q_n, p_1, \cdots, p_n, \eta \in \mathbb{R}$ serta Q bergantung pada $(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots,$ ζ_j bergantung pada $(q_1, \cdots, q_n)$ untuk semua $j \in \{1, \cdots, n\}$, dan η bergantung pada $(q_1, \cdots, q_n)$. Di sini, didefinisikan operator $\hat{q}_j := q_j$ dan $\hat{p}_j := -i\hbar\partial/\partial q_j$ untuk semua $j \in \{1, \cdots, n\}$, di mana $i := \sqrt{-1}$ adalah bilangan imajiner satuan, dan $\hbar$ adalah tetapan Planck tereduksi. Di sini, q_j adalah komponen koordinat kanonis, dan p_j adalah komponen dari momentum kanonis.

Andaikan ada sebuah gelombang kebolehjadian $\Psi \in \mathbb{C}$. Andaikan pula Ψ memenuhi persamaan Schrödinger $\hat{H}\Psi = i\hbar\partial\Psi/\partial t$ di mana $\hat{H}$ adalah operator variabel Hamiltonian untuk sistem fisis tertentu, dan $t \in \mathbb{R}$ adalah waktu.

Pengkuantuman dari Q dalam wakilan posisi tentu saja adalah sedemikian rupa sehingga

$$\hat{Q}\Psi = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}[\zeta_j\hat{p}_j\Psi + \hat{p}_j(\zeta_j\Psi)] + \eta\Psi \quad (8.210)$$

alias

$$\hat{Q}\Psi = -\frac{1}{2}i\hbar\sum_{j=1}^{n}\left(\zeta_j\frac{\partial\Psi}{\partial q_j} + \frac{\partial}{\partial q_j}(\zeta_j\Psi)\right) + \eta\Psi \quad (8.211)$$

alias

$$\hat{Q}\Psi = -\frac{1}{2}i\hbar\sum_{j=1}^{n}\left(\zeta_j\frac{\partial\Psi}{\partial q_j} + \frac{\partial\zeta_j}{\partial q_j}\Psi + \zeta_j\frac{\partial\Psi}{\partial q_j}\right) + \eta\Psi \tag{8.212}$$

untuk semua $\Psi \in \mathbb{C}$, sehingga pengkuantuman observabel Q adalah

$$\hat{Q} = \eta - i\hbar\sum_{j=1}^{n}\left(\zeta_j\frac{\partial}{\partial q_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial\zeta_j}{\partial q_j}\right). \tag{8.213}$$

8.33 Persamaan Schrödinger Relativistik

Tenaga kinetik partikel relativistik adalah

$$T = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} - mc^2, \tag{8.214}$$

di mana p, c, dan m berturut-turut adalah besar momentum partikel kuantum relativistik, kelajuan cahaya dalam ruang hampa, dan massa rehat partikel kuantum.

Hukum kelestarian tenaga relativistik adalah

$$E = T + V = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} - mc^2 + V \tag{8.215}$$

alias

$$E + mc^2 - V = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}, \tag{8.216}$$

di mana E, T, dan V berturut-turut adalah tenaga mekanik, tenaga kinetik, dan tenaga potensial milik partikel kuantum tersebut.

Pengkuadratan kedua ruas persamaan terakhir menghasilkan

$$E^2 + (mc^2)^2 + V^2 + 2mc^2E - 2VE - 2mc^2V = (pc)^2 + (mc^2)^2 \tag{8.217}$$

alias

$$E^2 + V^2 + 2mc^2E - 2VE - 2mc^2V - (pc)^2 = 0. \tag{8.218}$$

Simpangan gelombang partikel bebas pada posisi $\vec{r}$ dan waktu t adalah

$$\Psi = Ne^{i(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)/\hbar}, \tag{8.219}$$

di mana N adalah tetapan normalisasi, $\vec{p}$ adalah momentum partikel tersebut, dan $\hbar := 1,055\cdots(10^{-34})\,\mathrm{J\,s}$ adalah tetapan Planck tereduksi.

Dari persamaan terakhir, diperoleh

$$\nabla\Psi = i\vec{p}\Psi/\hbar, \quad \nabla^2\Psi = -p^2\Psi/\hbar^2, \quad p := |\vec{p}|, \quad p^2\Psi = -\hbar^2\nabla^2\Psi, \tag{8.220}$$

$$\partial\Psi/\partial t = -iE\Psi/\hbar, \quad E\Psi = i\hbar\partial\Psi/\partial t, \quad (pc)^2\Psi = -(\hbar c)^2\nabla^2\Psi. \tag{8.221}$$

Selanjutnya,

$$\left(E^2 + V^2 + 2mc^2E - 2VE - 2mc^2V - (pc)^2\right)\Psi = 0. \tag{8.222}$$

Oleh karena itu,

$$\left(-\hbar^2\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + V^2 + 2mc^2\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - V\right) - 2i\hbar V\frac{\partial}{\partial t} + (\hbar c)^2\nabla^2\right)\Psi = 0 \tag{8.223}$$

alias

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2mc^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2+\frac{V^2}{2mc^2}+i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-V-\frac{i\hbar}{mc^2}V\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\right)\Psi=0 \tag{8.224}$$

alias

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla^2-\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\right)+V\left(1-\frac{1}{2mc^2}\left(V-2i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)\right)\Psi=i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \tag{8.225}$$

yang merupakan persamaan Schrödinger relativistik.

Limit non-relativistik-nya, yaitu $c\to\infty$ alias $1/c\to+0$, adalah

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V\right)\Psi=i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \tag{8.226}$$

yang merupakan persamaan Schrödinger non-relativistik.

Meskipun ternyata persamaan Klein-Gordon dan persamaan Dirac bukanlah persamaan Schrödinger relativistik, tetapi bagaimanapun juga persamaan Klein-Gordon tetaplah persamaan Klein-Gordon, dan persamaan Dirac tetaplah persamaan Dirac.

8.34 Penyelesaian Persamaan Schrodinger Relativistik untuk Partikel Bebas

Persamaan Schrodinger relativistik adalah

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla^2\Psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}\right)+V\left(\Psi-\frac{1}{2mc^2}\left(V\Psi-2i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)\right)=i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \tag{8.227}$$

di mana $\hbar$ adalah tetapan Planck tereduksi, m adalah massa partikel, c adalah kelajuan cahaya dalam ruang hampa $t\in\mathbb{R}$ adalah waktu, $V\in\mathbb{R}$ adalah tenaga potensial, dan $\Psi\in\mathbb{C}$ adalah gelombang kebolehjadian yang bergantung pada posisi $\vec{r}\in\mathbb{R}^3$ dan waktu t.

Untuk partikel bebas, $V=0$, sehingga persamaan Schrodinger tadi menjadi

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla^2\Psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}\right)=i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}. \tag{8.228}$$

Apabila misalnya $\Psi:=\psi T$ di mana $\psi\in\mathbb{C}$ hanya bergantung pada $\vec{r}$, dan $T\in\mathbb{C}$ hanya bergantung pada t, maka

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{\psi}\nabla^2\psi-\frac{1}{c^2}\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2}\right)=i\hbar\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} \tag{8.229}$$

alias

$$\frac{1}{\psi}\nabla^2\psi-\frac{1}{c^2}\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2}=-\frac{2mi}{\hbar}\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} \tag{8.230}$$

alias

$$\frac{1}{\psi}\nabla^2\psi = \frac{1}{c^2}\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} - \frac{2mi}{\hbar}\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = -k^2 \tag{8.231}$$

di mana $k \in \mathbb{C}$ adalah sebuah tetapan.

Oleh karena itu,

$$\nabla^2\psi = -k^2\psi \tag{8.232}$$

dan

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2T}{dt^2} - \frac{2mi}{\hbar}\frac{dT}{dt} + k^2T = 0. \tag{8.233}$$

Andaikan $\psi := XYZ$ di mana $X \in \mathbb{C}$ hanya bergantung pada $x \in \mathbb{R}$, $Y \in \mathbb{C}$ hanya bergantung pada $y \in \mathbb{R}$, dan $Z \in \mathbb{C}$ hanya bergantung pada $z \in \mathbb{R}$, serta $\vec{r} := x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ di mana $\hat{x} := (1, 0, 0)$, $\hat{y} := (0, 1, 0)$, dan $\hat{z} := (0, 0, 1)$, maka

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -k^2 \tag{8.234}$$

sehingga

$$\frac{d^2X}{dx^2} = -k_x^2X, \tag{8.235}$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} = -k_y^2Y, \tag{8.236}$$

dan

$$\frac{d^2Z}{dz^2} = -k_z^2Z, \tag{8.237}$$

di mana $k_x, k_y, k_z \in \mathbb{C}$ sedemikian $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$.

Penyelesaian dari ketiga persamaan terakhir adalah

$$X = X_+e^{ik_xx} + X_-e^{-ik_xx} =: X_{k_x}, \tag{8.238}$$

$$Y = Y_+e^{ik_yy} + Y_-e^{-ik_yy} =: Y_{k_y}, \tag{8.239}$$

dan

$$Z = Z_+e^{ik_zz} + Z_-e^{-ik_zz} =: Z_{k_z}, \tag{8.240}$$

di mana $X_\pm, Y_\pm, Z_\pm \in \mathbb{C}$ adalah tetapan. Demikian pula,

$$T = T_+e^{\alpha_+t} + T_-e^{\alpha_-t} \tag{8.241}$$

di mana

$$\alpha_\pm := ic^2\left(\frac{m}{\hbar} \pm \sqrt{\frac{m^2}{\hbar^2} + \frac{k^2}{c^2}}\right) = i\beta_\pm \tag{8.242}$$

sehingga

$$T = T_+e^{i\beta_+t} + T_-e^{i\beta_-t} =: T_{k_xk_yk_z}. \tag{8.243}$$

Oleh karena itu, penyelesaian umumnya adalah

$$\Psi = \sum_{k_x,k_y,k_z\in\mathbb{C}} \alpha_{k_xk_yk_z}X_{k_x}Y_{k_y}Z_{k_z}T_{k_xk_yk_z}, \tag{8.244}$$

di mana $\alpha_{k_xk_yk_z} \in \mathbb{C}$ adalah koefisien kombinasi linier.

8.35 Penyelesaian Persamaan Schrodinger Relativistik untuk Tenaga Potensial Konstan

Persamaan Schrodinger relativistik adalah

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla^2\Psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}\right)+V\left(\Psi-\frac{1}{2mc^2}\left(V\Psi-2i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)\right)=i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \tag{8.245}$$

di mana $\hbar$ adalah tetapan Planck tereduksi, $m\in\mathbb{R}$ adalah massa rehat partikel yang mewakili gelombang kebolehjadian, $\Psi\in\mathbb{C}$ adalah gelombang kebolehjadian yang bergantung pada posisi $\vec{r}:=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ dan waktu $t\in\mathbb{R}$, dan $V\in\mathbb{R}$ adalah tenaga potensial yang konstan.

Andaikan $\Psi:=\psi T$ di mana $\psi\in\mathbb{C}$ hanya bergantung pada $\vec{r}$, dan $T\in\mathbb{C}$ hanya bergantung pada t, maka

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{\psi}\nabla^2\psi-\frac{1}{c^2T}\frac{d^2T}{dt^2}\right)+V\left(1-\frac{1}{2mc^2}\left(V-2i\hbar\frac{1}{T}\frac{dT}{dt}\right)\right)=i\hbar\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} \tag{8.246}$$

alias

$$\begin{aligned}-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi}\nabla^2\psi &= -\frac{\hbar^2}{2mc^2}\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2}\\ &\quad -V\left(1-\frac{1}{2mc^2}\left(V-2i\hbar\frac{1}{T}\frac{dT}{dt}\right)\right)\\ &\quad +i\hbar\frac{1}{T}\frac{dT}{dt}=-\frac{\hbar^2}{2m}k^2\end{aligned} \tag{8.247}$$

di mana $k\in\mathbb{C}$ adalah tetapan pemisahan variabel $\vec{r}$ dan t.

Selanjutnya,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\psi}\nabla^2\psi &= \frac{1}{c^2}\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2}+\frac{2m}{\hbar^2}V\left(1-\frac{1}{2mc^2}\left(V-2i\hbar\frac{1}{T}\frac{dT}{dt}\right)\right)\\ &\quad -\frac{2im}{\hbar}\frac{1}{T}\frac{dT}{dt}=k^2.\end{aligned} \tag{8.248}$$

Persamaan yang hanya mengandung $\vec{r}$ adalah

$$\nabla^2\psi=k^2\psi \tag{8.249}$$

alias

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=k^2\psi. \tag{8.250}$$

Apabila $\psi:=XYZ$ di mana $X\in\mathbb{C}$ hanya bergantung pada x, $Y\in\mathbb{C}$ hanya bergantung pada y, dan $Z\in\mathbb{C}$ hanya bergantung pada z, maka

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=k^2 \tag{8.251}$$

yang dipecah menjadi tiga buah persamaan, yaitu

$$\frac{d^2X}{dx^2} = k_x^2 X, \qquad \frac{d^2Y}{dy^2} = k_y^2 Y, \qquad \text{dan} \qquad \frac{d^2Z}{dz^2} = k_z^2 Z \tag{8.252}$$

sedemikian $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$. Penyelesaian umumnya adalah

$$X = X_+ e^{k_x x} + X_- e^{-k_x x} =: X_{k_x}, \tag{8.253}$$

$$Y = Y_+ e^{k_y y} + Y_- e^{-k_y y} =: Y_{k_y}, \tag{8.254}$$

$$Z = Z_+ e^{k_z z} + Z_- e^{-k_z z} =: Z_{k_z}. \tag{8.255}$$

Persamaan yang hanya mengandung t adalah

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2T}{dt^2} + \frac{2i}{\hbar}\left(\frac{V}{c^2} - m\right)\frac{dT}{dt} + \left(\frac{2m}{\hbar^2}V\left(1 - \frac{V}{2mc^2}\right) - k^2\right)T = 0 \tag{8.256}$$

yang penyelesaiannya adalah

$$T = T_+ e^{\alpha_+ t} + T_- e^{\alpha_- t} =: T_{k_x k_y k_z} \tag{8.257}$$

di mana

$$\alpha_\pm := ic^2\left[-\frac{1}{\hbar}\left(\frac{V}{c^2} - m\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\hbar}\left(\frac{V}{c^2} - m\right)\right)^2 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}V\left(1 - \frac{V}{2mc^2}\right) - k^2\right)}\right]. \tag{8.258}$$

Jadi, penyelesaian umum persamaan Schrodinger relativistik tersebut adalah

$$\Psi = \sum_{k_x, k_y, k_z \in \mathbb{C}} \beta_{k_x k_y k_z} X_{k_x} Y_{k_y} Z_{k_z} T_{k_x k_y k_z} \tag{8.259}$$

di mana $\beta_{k_x k_y k_z} \in \mathbb{C}$ adalah koefisien kombinasi linier.

8.36 Persamaan Schrödinger Relativistik pada Potensial Sumur Tak Hingga

Andaikan ada tenaga potensial sumur tak hingga satu-dimensi, yaitu $V \in \mathbb{R}$ sedemikian $V = 0$ untuk $|x| < a$, dan $V = +\infty$ untuk $|x| > a$ di mana V bergantung pada posisi $x \in \mathbb{R}$, serta $a \in \mathbb{R}^+$ merupakan setengah dari lebar sumur potensial.

Persamaan Schrödinger relativistik satu-dimensi tak gayut waktu di wilayah $|x| < a$ tentu saja adalah

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{E^2}{2mc^2}\psi = E\psi \tag{8.260}$$

alias

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\left(1 + \frac{E}{2mc^2}\right)\psi = -k^2\psi \tag{8.261}$$

di mana $\psi \in \mathbb{R}$ adalah gelombang kebolehjadian, $E \in \mathbb{R}$ adalah tenaga mekanik partikel kuantum, $m \in \mathbb{R}^+$ adalah massa rehat partikel kuantum, $\hbar$ adalah tetapan Planck tereduksi, c adalah kelajuan cahaya dalam ruang hampa, dan

$$k := (\sqrt{2mE}/\hbar)\sqrt{1 + E/(2mc^2)} \tag{8.262}$$

adalah sebuah tetapan.

Penyelesaian persamaan diferensial terakhir adalah

$$\psi = A\cos kx + B\sin kx \tag{8.263}$$

di mana $A, B \in \mathbb{C}$ adalah sebarang tetapan.

Nilai ψ di titik $|x| = a$ haruslah nol, sehingga

$$\psi_x(a) = A\cos ka + B\sin ka = 0 \tag{8.264}$$

dan

$$\psi_x(-a) = A\cos ka - B\sin ka = 0. \tag{8.265}$$

Agar ψ tidak trivial, maka A dan B tidak boleh sama dengan nol, sehingga haruslah

$$\begin{vmatrix} \cos ka & \sin ka \\ \cos ka & -\sin ka \end{vmatrix} = 0 \tag{8.266}$$

alias $\sin 2ka = 0$ alias $2ka = n\pi$ di mana $n \in \mathbb{Z}$, sehingga $k = n\pi/(2a)$ alias

$$\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\sqrt{1 + \frac{E}{2mc^2}} = \frac{n\pi}{2a} \tag{8.267}$$

alias

$$E^2 + 2mc^2E - \left(\frac{n\pi\hbar c}{2a}\right)^2 = 0 \tag{8.268}$$

alias (dengan bantuan rumus abc)

$$E = c\left(-mc \pm \sqrt{(mc)^2 + \left(\frac{n\pi\hbar}{2a}\right)^2}\right) \tag{8.269}$$

alias (dengan sedikit manipulasi)

$$E = E_n = \frac{(n\pi\hbar/2a)^2}{m \pm \sqrt{m^2 + (n\pi\hbar/2ac)^2}} \tag{8.270}$$

yang merupakan aras-aras tenaga partikel kuantum-relativistik dalam potensial sumur V tersebut.

Limit non-relativistik, yaitu $c \to \infty$, untuk E_n adalah

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8ma^2}. \tag{8.271}$$

Untuk partikel tak bermassa rehat, yaitu untuk $m = 0$, maka diperoleh

$$E_n = \frac{n\pi\hbar c}{2a} \tag{8.272}$$

dengan n adalah sebarang bilangan bulat. Besaran E_n pada persamaan terakhir merupakan aras-aras tenaga yang diskrit untuk partikel kuantum-relativistik yang tak bermassa rehat yang berada di dalam sumur potensial tak hingga V tersebut.

8.37 Rapat Peluang dan Rapat Arus Peluang dari Persamaan Schrödinger Relativistik

Persamaan Schrödinger relativistik adalah

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla^2\Psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}\right)+V\left(\Psi-\frac{1}{2mc^2}\left(V\Psi-2i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)\right)=i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \tag{8.273}$$

di mana $\hbar$ adalah konstanta Planck tereduksi, $m\in\mathbb{R}^+$ adalah massa partikel, $\Psi\in\mathbb{C}$ adalah gelombang kebolehjadian yang bergantung pada posisi $\vec{r}\in\mathbb{R}^3$ dan waktu $t\in\mathbb{R}$, c adalah konstanta kelajuan cahaya dalam ruang hampa, $V\in\mathbb{R}$ adalah tenaga potensial yang bergantung pada $\vec{r}$ dan t, dan $i:=\sqrt{-1}$ adalah bilangan imajiner satuan. Oleh karena itu,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\Psi^*\nabla^2\Psi-\frac{1}{c^2}\Psi^*\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}\right)+V\left(|\Psi|^2-\frac{1}{2mc^2}\left(V|\Psi|^2-2i\hbar\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)\right)=i\hbar\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t} \tag{8.274}$$

dan

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\Psi\nabla^2\Psi^*-\frac{1}{c^2}\Psi\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial t^2}\right)+V\left(|\Psi|^2-\frac{1}{2mc^2}\left(V|\Psi|^2+2i\hbar\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\right)\right)=-i\hbar\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}. \tag{8.275}$$

Dengan mengambil selisih dari kedua persamaan terakhir, diperoleh

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla\cdot(\Psi^*\nabla\Psi-\Psi\nabla\Psi^*)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t}-\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\right)\right)+\frac{i\hbar V}{mc^2}\frac{\partial|\Psi|^2}{\partial t}=i\hbar\frac{\partial|\Psi|^2}{\partial t} \tag{8.276}$$

alias

$$\frac{i\hbar}{2m}\left(\nabla\cdot(\Psi^*\nabla\Psi-\Psi\nabla\Psi^*)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t}-\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\right)\right)+\left(\frac{V}{mc^2}-1\right)\frac{\partial|\Psi|^2}{\partial t}=0 \tag{8.277}$$

alias

$$\nabla\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \tag{8.278}$$

yang merupakan persamaan kontinyuitas peluang, di mana

$$\vec{J}:=\frac{i\hbar}{2m}(\Psi\nabla\Psi^*-\Psi^*\nabla\Psi) \tag{8.279}$$

yang merupakan rapat arus peluangnya, dan

$$\rho:=\left(1-\frac{V}{mc^2}\right)|\Psi|^2+\frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}-\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right) \tag{8.280}$$

adalah rapat peluangnya.

8.38 Melihat Bentuk Ruang-Waktu secara Geometri

Sebagian besar dari kita telah mampu menentukan kelengkungan ruang-waktu dengan cara menghitung tensor kelengkungan Riemann dan skalar kelengkungan Riemann, tetapi kita untuk sementara ini belum dapat 'melihat' bentuk ruang-waktu kita secara utuh yang terbenam di ruang $\mathbb{R}^{10}$. Sebenarnya, sekedar menentukan tensor kelengkungan Riemann untuk ruang-waktu kita itu bukanlah berarti kita telah 'melihat' bentuk ruang-waktu seperti kita mempelajari ilmu geometri analitik, yaitu mencari tempat kedudukan sebuah objek geometris yang terbenam di dalam ruang $\mathbb{R}^n$.

Untuk melihat bentuk salah satu dari berbagai ruang-waktu, mula-mula kita perlu mengetahui berbagai kemungkinan gerak partikel cahaya di ruang $\mathbb{R}^3$, yang diwakili oleh keluarga kurva berparameterkan waktu $t \in \mathbb{R}$. Sebagai contoh, partikel cahaya yang bergerak lurus beraturan ke segala arah dengan kelajuan $c := 299792458$m/s, dengan koordinat-koordinat Cartesian $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ yaitu

$$x := x_0 + ct\sin\theta\cos\phi, \quad (8.281)$$
$$y := y_0 + ct\sin\theta\sin\phi, \quad (8.282)$$
$$z := z_0 + ct\cos\theta, \quad (8.283)$$

di mana $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ adalah posisi awal partikel cahaya tersebut (yang konstan), serta $\theta \in (0, \pi)$ dan $\phi \in (0, 2\pi)$ berturut-turut adalah sudut arah zenital dan azimutal gerak partikel cahaya tersebut, sehingga pengambilan diferensial dari ketiga persamaan tersebut menghasilkan

$$dx = c\,dt\sin\theta\cos\phi, \quad (8.284)$$
$$dy = c\,dt\sin\theta\sin\phi, \quad (8.285)$$
$$dz = c\,dt\cos\theta. \quad (8.286)$$

Dari identitas trigonometri $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, ketiga persamaan terakhir dapat disatukan menjadi

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = c^2dt^2 \quad (8.287)$$

atau

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2 = 0. \quad (8.288)$$

Khusus untuk partikel cahaya, panjang garis dunia (*world-line*) -nya adalah nol, yaitu bahwa

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{4} g_{\mu\nu}dq^\mu dq^\nu = 0 \quad (8.289)$$

di mana $q^1 := x$, $q^2 := y$, $q^3 := z$, dan $q^4 := t$, serta $g_{\mu\nu}$ adalah komponen ke-$\mu\nu$ dari 16 komponen dari tensor metrik di ruang-waktu tersebut. Karena tensor metrik itu merupakan tensor simetrik, yaitu bahwa $g_{\nu\mu} = g_{\mu\nu}$, maka sebenarnya tensor metrik tersebut hanya memiliki $6 + 4 = 10$ komponen, bukan 16 komponen.

Dengan membandingkan kedua persamaan terakhir ini, kita peroleh bahwa $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$, $g_{44} = -c^2$, dan $g_{12} = g_{21} = g_{13} = g_{31} = g_{14} = g_{41} = g_{23} = g_{32} = g_{24} = g_{42} = g_{34} = g_{43} = 0$.

Dalam analisis vektor dan tensor, komponen kovarian tensor metrik, yaitu $g_{\mu\nu}$, didefinisikan sebagai perkalian titik antara dua buah vektor basis kontravarian dari sebuah manifold yang terbenam (dalam kasus kita ini) di ruang $\mathbb{R}^{10}$. Kedua vektor basis tersebut adalah $\vec{e}_\mu := \partial\vec{s}/\partial q^\mu$ dan $\vec{e}_\nu := \partial\vec{s}/\partial q^\nu$, di mana $\vec{s} := (s_1, s_2, s_3, \cdots, s_{10}) \in \mathbb{R}^{10}$ merupakan posisi setiap titik pada manifold ruang-waktu tersebut yang dibenamkan di ruang $\mathbb{R}^{10}$, sehingga $g_{\mu\nu} = \vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu$, alias

$$\sum_{\rho=1}^{10} \frac{\partial s_\rho}{\partial q^\mu}\frac{\partial s_\rho}{\partial q^\nu} = g_{\mu\nu} \tag{8.290}$$

di mana $\mu = 1, 2, 3, 4$ dan $\nu = 1, \cdots, \mu$.

Sebenarnya, persamaan diferensial parsial terakhir tersebut merupakan 10 buah persamaan diferensial parsial yang harus diselesaikan untuk $(s_1, \cdots, s_{10})$ sebagai fungsi 4 buah parameter ruang-waktu, yaitu (x, y, z, t). Inilah bentuk ruang waktu yang sedang kita bahas ini.

Selama kita belum mampu menyelesaikan sistem persamaan diferensial parsial tersebut (yang tentu saja terdiri dari 10 persamaan diferensial parsial), kita tidak dapat melihat bentuk ruang-waktu yang ingin kita lihat ini. Prosedur pencarian penyelesaian umum dari sistem persamaan ini sangat rumit, sehingga yang dapat kita lakukan semata-mata hanyalah mencari solusi deret pangkat maupun menebak penyelesaiannya melalui intuisi.

Ternyata, salah satu kemungkinan penyelesaian sistem persamaan diferensial parsial (8.290), di mana $q^1 := x$, $q^2 := y$, $q^3 := z$, dan $q^4 := t$, $\mu = 1, \cdots, 4$, dan $\nu = 1, \cdots, \mu$ serta $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$, $g_{44} = -c^2$, dan $g_{12} = g_{21} = g_{13} = g_{31} = g_{14} = g_{41} = g_{23} = g_{32} = g_{24} = g_{42} = g_{34} = g_{43} = 0$, adalah $s_1 = x$, $s_2 = y$, $s_3 = z$, $s_4 = ict$, $s_5 = s_6 = s_7 = s_8 = s_9 = s_{10} = 0$, dengan $i^2 = -1$.

8.39 Menentukan Lintasan Partikel Cahaya jika Diketahui Bentuk Ruang-Waktu-nya

Andaikan ada sebuah ruang waktu 2-dimensi yang berbentuk permukaan bola 2-dimensi, yaitu

$$S^2(0, R) := \{(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (s_1)^2 + (s_2)^2 + (s_3)^2 = R^2\}, \tag{8.291}$$

di mana R adalah jari-jari ruang-waktu permukaan bola tersebut yang konstan.

Salah satu parameterisasi ruang-waktu tersebut adalah

$$s_1 := R\cos kx, \tag{8.292}$$

$$s_2 := R\sin kx\cos\omega t, \tag{8.293}$$

$$s_3 := R\sin kx\sin\omega t, \tag{8.294}$$

di mana $k, \omega \in \mathbb{R}$ adalah dua buah konstanta, serta (x, t) adalah parameter ruang-waktu 2-dimensi tersebut.

Tentu saja, komponen ke-$\mu\nu$ dari 4 komponen tensor metrik manifold ruang-waktu tersebut adalah

$$g_{\mu\nu} = \sum_{\rho=1}^{3} \frac{\partial s_\rho}{\partial q^\mu}\frac{\partial s_\rho}{\partial q^\nu}, \tag{8.295}$$

di mana $q^1 := x$ dan $q^2 := t$, mengingat $g_{\nu\mu} = g_{\mu\nu}$.

Dengan sedikit perhitungan, akan diperoleh $g_{11} = k^2R^2$, $g_{12} = g_{21} = 0$, dan $g_{22} = \omega^2 R^2 \sin^2 kx$.

Karena untuk partikel cahaya, panjang garis dunia (*world-line*) -nya harus nol, maka

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{2} g_{\mu\nu} dq^\mu dq^\nu = 0, \tag{8.296}$$

yang tidak lain adalah

$$k^2R^2dx^2 + \omega^2R^2\sin^2 kx\, dt^2 = 0, \tag{8.297}$$

alias (dengan $i^2 = -1$)

$$k\,dx = i\omega \sin kx dt \tag{8.298}$$

alias

$$\csc kx\, dx = i(\omega/k)\, dt. \tag{8.299}$$

Pengintegralan persamaan terakhir menghasilkan

$$-\frac{1}{k}\ln\left(\frac{\cot kx + \csc kx}{\cot(kx_0) + \csc kx_0}\right) = i\frac{\omega t}{k}, \tag{8.300}$$

di mana x_0 adalah posisi awal partikel cahaya tersebut.

Identitas trigonometri $\cot\alpha + \csc\alpha = \cot(\alpha/2)$ menyebabkan persamaan terakhir menjadi

$$-\ln\left(\frac{\cot(kx/2)}{\cot(kx_0/2)}\right) = i\omega t, \tag{8.301}$$

alias

$$\frac{\cot(kx/2)}{\cot(kx_0/2)} = e^{-i\omega t}, \tag{8.302}$$

alias

$$x = (2/k)\cot^{-1}\left(e^{-i\omega t}\cot(kx_0/2)\right). \tag{8.303}$$

Inilah keluarga lintasan gerak partikel cahaya tersebut di $\mathbb{C}$.

Meskipun demikian, ini hanyalah contoh kemungkinan yang cukup sederhana dari sekian banyak kemungkinan gerak yang seharusnya, mengingat setiap manifold itu memiliki medan tensor metrik yang tidak tunggal karena parameterisasi posisi pada manifold tersebut juga tidak tunggal.

8.40 Menentukan Persamaan Gerak Cahaya apabila Diketahui Bentuk Ruang-Waktunya

Andaikan ada sebuah ruang-waktu berdimensi-2 yang terbenam di ruang $\mathbb{R}^3$, yang berbentuk kerucut, yaitu

$$C := \left\{(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3 \mid s_1^2 + s_2^2 = \alpha^2 s_3^2\right\} \tag{8.304}$$

di mana $\alpha \in \mathbb{R}$ adalah sebuah tetapan.

Salah satu parameterisasi dari kerucut C tersebut adalah

$$s_1 := \alpha vt \cos kx, \qquad s_2 := \alpha vt \sin kx, \qquad \text{dan} \qquad s_3 := vt, \tag{8.305}$$

di mana $k, v \in \mathbb{R}$ adalah tetapan, serta $x, t \in \mathbb{R}$ adalah parameter.

Komponen tensor metriknya tentu saja adalah

$$g_{\mu\nu} := \sum_{\rho=1}^{3} \frac{\partial s_\rho}{\partial q^\mu} \frac{\partial s_\rho}{\partial q^\nu} \tag{8.306}$$

untuk setiap $\mu \in \{1, 2\}$ dan $\nu \in \{1, \cdots, \mu\}$. Dalam hal ini, $q^1 := x$ dan $q^2 := t$ merupakan parameter dari kerucut C tersebut.

Tentu saja,

$$g_{11} = \sum_{\rho=1}^{3} \left(\frac{\partial s_\rho}{\partial x} \right)^2 = \alpha^2 k^2 v^2 t^2, \tag{8.307}$$

$$g_{12} = \sum_{\rho=1}^{3} \frac{\partial s_\rho}{\partial x} \frac{\partial s_\rho}{\partial t} = 0 = g_{21}, \tag{8.308}$$

$$g_{22} = \sum_{\rho=1}^{3} \left(\frac{\partial s_\rho}{\partial t} \right)^2 = v^2(\alpha^2 + 1). \tag{8.309}$$

Karena untuk cahaya, penggal jarak di ruang-waktu harus nol, yaitu bahwa

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{2} g_{\mu\nu} dq^\mu dq^\nu = 0, \tag{8.310}$$

maka dengan memasukkan nilai $g_{\mu\nu}$ tersebut, diperolehlah

$$\alpha^2 k^2 t^2 dx^2 + (\alpha^2 + 1) dt^2 = 0 \tag{8.311}$$

alias

$$\frac{\alpha k}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} dx = \pm i \frac{dt}{t} \tag{8.312}$$

yang diintegralkan kedua ruasnya menjadi

$$\frac{\alpha k}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} (x - x_0) = \pm i \ln \left| \frac{t}{t_0} \right|. \tag{8.313}$$

Persamaan terakhir ini merupakan persamaan gerak cahaya yang mewakili ruang-waktu tersebut. Di sini, x mewakili ruang, serta t mewakili waktu.

Sekarang, apabila ruang-waktu tersebut berbentuk bidang datar, yaitu

$$P := \{(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3 \mid As_1 + Bs_2 + Cs_3 = D\} \tag{8.314}$$

di mana $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ adalah tetapan.

Salah satu parameterisasi dari bidang datar P tersebut adalah

$$s_1 := x, \qquad s_2 := vt, \qquad \text{dan} \qquad s_3 := (D - Ax - Bvt)/C \tag{8.315}$$

di mana $v \in \mathbb{R}$ adalah tetapan.

Apabila $q^1 := x$ dan $q^2 := t$, maka tentu saja

$$g_{11} = k^2(1 + A^2/C^2), \quad g_{12} = ABkv/C^2 = g_{21}, \quad \text{dan} \quad g_{22} = v^2(1 + B^2/C^2). \tag{8.316}$$

Untuk cahaya, berlakulah

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{2} g_{\mu\nu} dq^\mu dq^\nu = 0, \tag{8.317}$$

sehingga, dengan substitusi $g_{\mu\nu}$, diperoleh

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v\left(-AB \pm iC\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\right)}{A^2 + C^2}. \tag{8.318}$$

Inilah persamaan gerak cahaya yang mewakili ruang waktu P.

8.41 Konsep Pengamat Agung

Pengamat agung adalah pengamat yang tidak memerlukan partikel informatif untuk mengamati gerak sebuah objek di ruang $\mathbb{R}^3$, sedangkan *pengamat non-agung* adalah pengamat yang memerlukan partikel informatif untuk mengamati gerak sebuah objek di ruang $\mathbb{R}^3$. Contoh partikel informatif di sini adalah *lukson*, yaitu partikel yang sedang bergerak dengan kelajuan cahaya dalam ruang hampa, yaitu $c := 299792458, \cdots \text{m/s}$. Contoh dari lukson adalah foton yang bergerak dalam ruang hampa. Di sini, diasumsikan bahwa objek tersebut selalu memancarkan lukson secara terus-menerus ke segala arah dengan *lintasan garis lurus* di ruang $\mathbb{R}^3$ selama ia bergerak. Pada titik waktu $\tilde{t} \in \mathbb{R}$, posisi objek tersebut adalah $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ menurut pengamat agung di titik $\vec{0} \in \mathbb{R}^3$. Titik waktu menurut pengamat non-agung di titik $\vec{0} \in \mathbb{R}^3$ adalah $t \in \mathbb{R}$ yang bersesuaian dengan titik waktu $\tilde{t}$ menurut pengamat agung tersebut, sehingga

$$dt = d\tilde{t} + (1/c)|\vec{r}_{\tilde{t}}(\tilde{t} + d\tilde{t})| - (1/c)|\vec{r}| \tag{8.319}$$

alias

$$dt = d\tilde{t} + (1/c)d|\vec{r}| \tag{8.320}$$

alias

$$\frac{dt}{d\tilde{t}} = 1 + \frac{1}{c}\frac{d|\vec{r}|}{d\tilde{t}} \tag{8.321}$$

alias (diintegralkan)

$$\int_0^{\tilde{t}} \frac{dt}{d\tilde{t}} d\tilde{t} = \int_0^{\tilde{t}} d\tilde{t} + \frac{1}{c}\int_0^{\tilde{t}} \frac{d|\vec{r}|}{d\tilde{t}} d\tilde{t} \tag{8.322}$$

alias

$$t = t_{\tilde{t}}(0) + \tilde{t} + (1/c)(|\vec{r}| - |\vec{r}_{\tilde{t}}(0)|). \tag{8.323}$$

Tentu saja, posisi objek tersebut pada saat t menurut pengamat non-agung adalah $\vec{r} \mapsto t$ yang tentu saja sama dengan posisi $\vec{r} \mapsto \tilde{t}$ menurut pengamat agung. Yang membedakan di sini semata-mata hanyalah urutan penampakan objek tersebut antara menurut pengamat agung dan menurut pengamat non-agung. Tentu saja, pengamat agung akan melihat objek tersebut lebih awal daripada pengamat non-agung, mengingat, sekali lagi, pengamat agung tidak memerlukan partikel informatif dalam melihat objek tersebut, sedangkan pengamat non-agung memerlukan partikel informatif dalam melihat objek tersebut.

8.42 Hukum Fisika untuk Model Bumi Datar

Hukum fisika untuk model bumi datar tentu berbeda dengan hukum fisika untuk model bumi bulat berotasi. Contohnya adalah hukum gravitasi dan hukum pembiasan cahaya. Untuk memperoleh hukum fisika pada bumi datar dapat dilakukan dengan cara melakukan transformasi koordinat bumi datar ke koordinat bumi bulat berotasi, kemudian berlakukan hukum fisika yang telah diakui keabsahannya dalam model bumi bulat berotasi, kemudian lakukan transformasi balik koordinat bumi bulat berotasi yang berkaitan dengan hukum fisika tersebut menjadi koordinat bumi datar yang berkaitan dengan hukum fisika tersebut. Transformasi koordinatnya adalah sebagai berikut.

Misalkan dalam sistem koordinat Cartesian, pusat bumi bulat berotasi ada di titik $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$, serta posisi suatu titik P adalah $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, maka posisi P dalam kerangka acuan bumi bulat yang berotasi dengan frekuensi sudut $\omega \in \mathbb{R}$ adalah $(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ pada waktu $t \in \mathbb{R}$ sedemikian rupa sehingga

$$x' = x\cos\omega t + y\sin\omega t, \qquad y' = -x\sin\omega t + y\cos\omega t, \qquad z' = z. \tag{8.324}$$

Apabila dalam kerangka acuan bumi bulat yang berotasi, posisi P dalam koordinat polar bola adalah (r,θ,ϕ), maka

$$r = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \qquad \theta = \arctan_2(z', \sqrt{x'^2 + y'^2}), \qquad \phi = \arctan_2(x', y'). \tag{8.325}$$

Dengan menggunakan proyeksi stereografis terhingga, posisi P menurut model bumi datar adalah $(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3$ sedemikian rupa sehingga

$$X = \mathcal{R}\tanh(\tan(\theta/2))\cos\phi, \qquad Y = \mathcal{R}\tanh(\tan(\theta/2))\sin\phi, \qquad Z = Z_0\ln(r/R) \tag{8.326}$$

di mana $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^+$ adalah jari-jari bumi datar, $Z_0 \in \mathbb{R}^+$ adalah tetapan kesebandingan yang berdimensi panjang, dan $R \in \mathbb{R}^+$ adalah jari-jari bumi bulat.

Pemetaan $(x,y,z) \mapsto (X,Y,Z)$ merupakan transformasi koordinat bumi bulat berotasi ke koordinat bumi datar.

Transformasi koordinat bumi datar ke koordinat bumi bulat berotasi, yaitu $(X,Y,Z) \mapsto (x,y,z)$, adalah

$$\theta = 2\tan^{-1}(\tanh^{-1}(\sqrt{X^2+Y^2}/\mathcal{R})), \qquad \phi = \arctan_2(X,Y), \qquad r = Re^{Z/Z_0}, \tag{8.327}$$

$$x' = r\sin\theta\cos\phi, \qquad y' = r\sin\theta\sin\phi, \qquad z' = r\cos\theta, \tag{8.328}$$

$$x = x'\cos\omega t - y'\sin\omega t, \qquad y = x'\sin\omega t + y'\cos\omega t, \qquad z = z'. \tag{8.329}$$

Jadi, untuk memperoleh hukum fisika pada model bumi datar, mula-mula kita lakukan transformasi $(X,Y,Z) \mapsto (x,y,z)$, kemudian kita berlakukan hukum fisika bumi bulat berotasi, kemudian kita transformasikan hukum fisika tersebut menurut $(x,y,z) \mapsto (X,Y,Z)$. Dengan demikian kita telah memperoleh hukum fisika untuk bumi datar.

8.43 Mekanika Dijital

Pada kesempatan ini, saya hendak menerangkan tentang konsep mekanika dijital. Dalam mekanika dijital, benda tidak bergerak dalam ruang $\mathbb{R}^3$, melainkan setiap titik hanya berkedip antara nilai 0 dan 1, yang membuat gambaran bahwa seolah-olah ada benda yang bergerak.

Andaikan seolah-olah ada sebuah titik $\vec{R} \in \mathbb{R}^3$ yang bergantung pada waktu $t \in \mathbb{R}$, yang seolah-olah bergerak bergerak dalam ruang $\mathbb{R}^3$. Kuantitas dijitalnya adalah $\delta = p(\vec{r} - \vec{R})$, di mana $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ adalah fungsi cuplik di mana $p(\vec{r})$ bernilai 1 untuk $\vec{r} = \vec{0}$, dan bernilai 0 untuk $\vec{r} \neq \vec{0}$. Jadi, δ itu merupakan kuantitas yang bergantung pada $\vec{r}$ dan t, yang hanya dapat bernilai 0 atau 1.

Selanjutnya, apabila terdapat sebuah kurva $C(f, g) := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{r}) = g(\vec{r}) = 0\}$, di mana $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ adalah fungsi kontinyu, yang seolah-olah mengalami translasi $\vec{R}$ yang bergantung pada waktu t, maka kuantitas dijitalnya adalah $\delta = p(f(\vec{r} - \vec{R}))p(g(\vec{r} - \vec{R}))$, di mana kali ini $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sedemikian $p(x)$ bernilai 1 untuk $x = 0$, dan bernilai 0 untuk $x \neq 0$.

Selanjutnya, apabila terdapat sebuah permukaan $S(f) := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{r}) = 0\}$ yang seolah-olah mengalami translasi $\vec{R}$ yang bergantung pada waktu t, maka kuantitas dijitalnya adalah $\delta = p(f(\vec{r} - \vec{R}))$.

Terakhir, apabila terdapat sebuah volume $V(f) := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{r}) < 0\}$, yang seolah-olah mengalami translasi $\vec{R}$ yang bergantung pada waktu t, maka kuantitas dijitalnya adalah $\delta = u(-f(\vec{r} - \vec{R}))$, di mana $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sedemikian $u(x)$ bernilai 1 untuk $x > 0$, bernilai 1/2 untuk $x = 0$, dan bernilai 0 untuk $x < 0$.

Bab 9

Soal-Soal Latihan

9.1 Paket A

1. Andaikan sebuah pegas ideal horizontal dengan konstanta pegas k yang ujung pertamanya dilekatkan pada sebuah tembok, sedangkan ujung yang satunya diikatkan sebuah benda bermassa m di atas lantai yang licin sempurna, lalu benda tersebut ditarik sejauh A, lalu dilepaskan, maka benda tersebut akan mengalami getaran selaras tak teredam. Tentukan (a) amplitudo getaran, (b) frekuensi sudut getaran, (c) kelajuan maksimum getaran, (d) magnitudo percepatan maksimum getaran, (e) tenaga kinetik maksimum getaran, (f) tenaga potensial pegas maksimum getaran, (g) tenaga mekanik getaran.

   Jawaban. (a) Amplitudo getarannya adalah A. (b) Frekuensi sudut getarannya adalah $\omega = \sqrt{k/m}$. (c) Kelajuan maksimum getaran adalah $v_{\text{mak}} = \omega A = \sqrt{k/m}A$. (d) Magnitudo percepatan maksimum getaran adalah $\omega^2 A = kA/m$. (e) Tenaga kinetik maksimum getaran adalah $T_{\text{mak}} = \frac{1}{2}mv_{\text{mak}}^2 = \frac{1}{2}m(k/m)A^2 = \frac{1}{2}kA^2$. (f) Karena simpangan maksimum getaran adalah $x_{\text{mak}} = A$, maka tenaga potensial pegas maksimum getaran adalah $V_{\text{mak}} = \frac{1}{2}kx_{\text{mak}}^2 = \frac{1}{2}kA^2$. (g) Tenaga mekanik getaran adalah $E = T + V = \frac{1}{2}kA^2(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t) = \frac{1}{2}kA^2$. ■

2. Getaran itu dapat merupakan getaran selaras dan getaran tidak selaras. (a) Apa definisi getaran secara umum? (b) Apakah getaran itu harus mempunyai periode getaran? (c) Getaran detak jantung itu merupakan getaran selaras atau tidak?

   Jawaban. (a) Getaran merupakan gerakan bolak-balik sebuah besaran fisis. (b) Tidak. Getaran tidak harus memiliki periode. (c) Tidak. ■

3. Hukum Hooke itu berasal dari getaran selaras yang seperti apa?

   Jawaban. Hukum Hooke berasal dari getaran selaras tak teredam. ■

4. Selesaikan persamaan diferensial getaran selaras tak teredam berikut ini, yaitu
$$m\ddot{x} + kx = 0, \tag{9.1}$$
dalam artian, carilah x yang bergantung pada waktu t, di mana $\ddot{x} := d^2x/dt^2$ adalah percepatan, m adalah massa benda yang konstan, dan k adalah tetapan pegas yang konstan pula, dalam penyelesaian umum.

   Jawaban. $x = A\cos(t\sqrt{k/m}) + B\sin(t\sqrt{k/m})$ di mana A dan B adalah tetapan sebarang. ■

5. Apakah setiap gerak bolak-balik itu dapat disebut sebagai getaran?

   Jawaban. Ya. ■

6. Sebenarnya, gelombang itu kurang tepat apabila disebut sebagai getaran yang merambat. Sebutkan definisi gelombang secara umum.

   Jawaban. Gelombang adalah besaran fisis yang bergantung pada posisi ruang dan waktu, yang memenuhi persamaan gelombang tertentu. ■

7. Turunkan asal muasal persamaan diferensial gelombang 1-dimensi dari sebuah fungsi gelombang datar, kemudian selesaikan persamaan diferensial tersebut agar dihasilkan fungsi gelombang yang paling umum.

   Jawaban. $\Psi = Ae^{i(kx-\omega t)}$ lalu $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi = -k^2\Psi$ dan $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi = -\omega^2\Psi$, sehingga
$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \tag{9.2}$$
di mana $v := \omega/k$. Penyelesaian umum dari persamaan (9.2) adalah $\Psi = A_+ f(x+vt) + A_- f(x-vt)$ di mana $A_\pm$ adalah tetapan sebarang, dan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ adalah sebuah fungsi sebarang. ■

8. Sebutkan 4 (empat) buah persamaan diferensial vektor yang mengatur perilaku gelombang elektromagnetik $\vec{E}$ dan $\vec{B}$.

   Jawaban. $\nabla\cdot\vec{D} = \rho$ (hukum Gauss listrik), $\nabla\cdot\vec{B} = 0$ (hukum Gauss magnet), $\nabla\times\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$ (hukum Faraday), dan $\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \partial\vec{D}/\partial t$ (hukum Ampere), di mana $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ dan $\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \vec{M}$. ■

9. Bagaimana ceritanya bahwa sebarang fungsi periodik $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dapat disajikan dalam deret Fourier kosinus-sinus dan eksponensial kompleks?

   Jawaban. Lihat sesi 7.34. ■

10. Diketahui sebuah partikel klasik bermassa m dan bergerak dengan kecepatan $\vec{v}$ yang relativistik. Tentukan (a) massa transversal, (b) massa longitudinal.

Jawaban. Lihat persamaan (4.12). ■

11. Sebutkan definisi energi kinetik secara umum, kemudian dari definisi tersebut, turunkan rumus energi kinetik relativistik untuk partikel klasik bermassa rehat m_0 yang sedang bergerak dengan kecepatan $\vec{v}$ relativistik.

Jawaban. Lihat persamaan (4.13). ■

12. Persamaan Maxwell diferensial terdiri dari 4 (empat) buah persamaan. Tetapi keempat persamaan tersebut dapat disatukan menjadi sebuah persamaan saja. Sebutkan keempat buah persamaan tersebut dan sebuah persamaan gabungannya.

Jawaban. Lihat sesi 5.25. ■

13. Gelombang seperti apakah yang diatur oleh (a) persamaan gelombang biasa, (b) persamaan Maxwell, (c) persamaan Schrödinger non-relativistik, (d) persamaan Klein-Gordon, (e) persamaan Dirac, (f) persamaan Schrödinger relativistik?

Jawaban. (a) gelombang mekanik. (b) gelombang elektromagnetik. (c) gelombang kemungkinan. (d) gelombang medan skalar Klein-Gordon. (e) gelombang bispinor Dirac. (f) gelombang kemungkinan relativistik. ■

14. Buktikan bahwa untuk setiap $m, n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \cdots\}$ berlaku kesamaan

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} dx = \pi\delta_{mn} \quad (9.3)$$

di mana δ_{mn} adalah delta Kronecker.

Jawaban. Untuk setiap $j, k \in \mathbb{N}$, berlaku

$$\begin{aligned}
I &:= \int_{-\pi}^{\pi} \cos jy \cos ky\, dy \\
&= \delta_{jk} \lim_{k\to j} \left.\frac{k\cos jy \sin ky - j \sin jy \cos ky}{k^2 - j^2}\right|_{y=-\pi}^{y=\pi} \\
&= \delta_{jk} \lim_{k\to j} \left.\frac{\cos jy \sin ky + ky\cos jy \cos ky + jy \sin jy \sin ky}{2k}\right|_{y=-\pi}^{y=\pi} \\
&= \delta_{jk} \frac{1}{2j}\left.\left(jy + \frac{1}{2}\sin 2jy\right)\right|_{y=-\pi}^{y=\pi} = \pi\delta_{jk}, \qquad (9.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J &:= \int_{-\pi}^{\pi} \cos jy \cos ky\, dy \\
&= \delta_{jk} \lim_{k\to j} \left.\frac{j\cos jy \sin ky - k\sin jy \cos ky}{k^2 - j^2}\right|_{y=-\pi}^{y=\pi} \\
&= \delta_{jk} \lim_{k\to j} \left.\frac{jy\cos jy \cos ky - \sin jy \cos ky + ky \sin jy \sin ky}{2k}\right|_{y=-\pi}^{y=\pi} \\
&= \delta_{jk} \frac{1}{2j}\left(jy - \frac{1}{2}\sin 2jy\right)\bigg|_{y=-\pi}^{y=\pi} = \pi\delta_{jk},
\end{aligned} \tag{9.5}$$

$$\begin{aligned}
K &:= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)y} dy = \delta_{jk} \lim_{k\to j} \left.\frac{e^{i(j-k)y}}{i(j-k)}\right|_{y=-\pi}^{y=\pi} \\
&= \delta_{jk} \lim_{k\to j} \left(ye^{i(j-k)y}\right)\bigg|_{y=-\pi}^{y=\pi} = \delta_{jk} y|_{y=-\pi}^{y=\pi} = 2\pi\delta_{jk}.
\end{aligned} \tag{9.6}$$

■

15. Turunkan identitas parseval untuk deret Fourier kosinus-sinus dan eksponensial kompleks.

    Jawaban. Lihat sesi 7.34. ■

16. Tentukan nilai dari deret-deret tak hingga berikut ini. (a) $1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots$, (b) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\cdots$, (c) $1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\cdots$.

    Jawaban. (a) Karena $1+x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\cdots = e^x$, maka $1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots = e$. (b) Karena $1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots = \cos x$, maka $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\cdots = \cos 1$. (c) Karena $x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots = \sin x$, maka $1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\cdots = \sin 1$. ■

17. Buktikan rumus Euler berikut ini, yaitu $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ untuk setiap $\theta \in \mathbb{R}$ dengan $i^2 = -1$.

    Jawaban. Apabila $z := \cos\theta + i\sin\theta$, maka $dz = iz\,d\theta$, sehingga $dz/z = i\,d\theta$. Pengintegralan persamaan terakhir menghasilkan $\ln z = i\theta$ alias $z = e^{i\theta}$. ■

18. Diketahui sebuah partikel bergerak dengan kecepatan $\vec{v}$ relativistik. Gerak partikel ini dapat mewakili gerak gelombang yang berkaitan dengan partikel tersebut. Tentukan (a) kecepatan fase gelombang, (b) kecepatan grup gelombang.

    Jawaban. (a) Kelajuan fase gelombang adalah $w := \omega/k$, di mana

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi mc^2/h = 2\pi m_0 c^2/(h\sqrt{1-v^2/c^2}), \tag{9.7}$$

serta

$$k = 2\pi/\lambda = 2\pi m v/h = 2\pi m_0 v/(h\sqrt{1 - v^2/c^2}), \tag{9.8}$$

dengan mengingat $E = mc^2 = h\nu$ dan $p = mv = h/\lambda$, sehingga $w = c^2/v$, lalu kecepatan fasenya adalah $\vec{w} := w\vec{v}/v = c^2\vec{v}/|\vec{v}|^2$. (b) Kelajuan grup gelombang adalah $u := d\omega/dk = (d\omega/dv)/(dk/dv)$, lalu $d\omega/dv = 2\pi m_0 v/(h(1 - v^2/c^2)^{3/2})$ dan $dk/dv = 2\pi m_0/(h(1 - v^2/c^2)^{3/2})$, sehingga $u = v$, lalu kecepatan grupnya adalah $\vec{u} := u\vec{v}/v = \vec{v}$. ■

19. (a) Mengapa kelajuan fase gelombang relativistik selalu lebih dari atau sama dengan kelajuan cahaya dalam ruang hampa? (b) Mengapa kelajuan grup gelombang relativistik selalu kurang dari atau sama dengan kelajuan cahaya dalam ruang hampa?

    Jawaban. (a) Karena selalu $v \le c$, maka $v/c \le 1$ alias $c/v \ge 1$, sehingga $w = c^2/v = (c/v)c \ge c$. (b) $u = v = (v/c)c \le c$. ■

20. Sebuah foton dengan panjang gelombang λ ditembakkan secara lurus ke sebuah elektron dengan massa rehat m_0, sedemikian rupa foton tersebut terpantul oleh elektron dengan arah yang membentuk sudut ϕ dari arah semula. (a) Tentukan panjang gelombang foton tersebut setelah menabrak eletron tersebut. (b) Tentukan panjang gelombang Compton dari elektron tersebut.

    Jawaban. Foton dan elektron berlaku seperti bola bilyard. Kehilangan energi foton sama dengan energi yang diterima elektron, sehingga $h\nu - h\nu' = K$ dengan mengingat $E = \sqrt{(pc)^2 + (m_0c^2)^2} = pc$ karena $m_0 = 0$. Momentum foton adalah $p = E/c = h\nu/c = h/\lambda = \hbar k$. (a) Momentum awal sama dengan momentum akhir. Dalam arah foton semula, diperoleh $h\nu/c + 0 = (h\nu'/c)\cos\phi + p\cos\theta$. Dalam arah tegak lurus foton semula, diperoleh $0 = (h\nu'/c)\sin\phi - p\sin\theta$. Oleh karena itu, $pc\cos\theta = h\nu - h\nu'$ dan $pc\sin\theta = h\nu'\sin\phi$, sehingga $p^2c^2 = (h\nu)^2 - 2(h\nu)(h\nu')\cos\phi + (h\nu')^2$. Energi relativistik partikel adalah $E = K + m_0c^2$ sehingga $(K + m_0c^2)^2 = m_0^2c^4 + p^2c^2$ alias $p^2c^2 = K^2 + 2m_0c^2K$. Karena $K = h\nu - h\nu'$, maka $p^2c^2 = (h\nu)^2 - 2(h\nu)(h\nu') + (h\nu')^2 + 2m_0c^2(h\nu - h\nu')$. Dengan menyamakan p^2c^2, diperoleh $2m_0c^2(h\nu - h\nu') = 2(h\nu)(h\nu')(1 - \cos\phi)$ alias $(m_0c/h)(\nu/c - \nu'/c) = (\nu/c)(\nu'/c)(1 - \cos\phi)$. Mengingat $\nu/c = 1/\lambda$ dan $\nu'/c = 1/\lambda'$, maka diperoleh $(m_0c/h)(1/\lambda - 1/\lambda') = (1 - \cos\phi)/(\lambda\lambda')$ alias $\lambda' = \lambda + (h/(m_0c))(1 - \cos\phi)$. (b) Panjang gelombang Compton-nya adalah $\lambda_C := h/(m_0c)$. ■

21. Berapakah massa dan momentum relativistik sebuah foton dengan panjang gelombang λ yang bergerak dengan kelajuan $c := 299792458\,\text{m/s}$?

    Jawaban. $mc^2 = h\nu$ alias $m = h\nu/c^2 = h/(\lambda c)$ adalah massa relativistiknya. Momentum relativistiknya adalah $p = mv = (h/(\lambda c))c = h/\lambda$. ■

9.2 Paket B

1. Selesaikan persamaan matriks berikut ini dengan aturan Cramer (metode determinan),
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}, \tag{9.9}$$
yaitu dengan mencari nilai x_1, x_2, x_3, dan x_4.

Jawaban.
$$x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}^{-1}, \tag{9.10}$$
$$x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & b_4 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}^{-1}, \tag{9.11}$$
dan seterusnya. ∎

2. Tentukan nilai-nilai determinan berikut ini,
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ d & 0 & c & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \tag{9.12}$$
dengan a, b, c, d adalah bilangan-bilangan riil.

Jawaban.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = 0, \tag{9.13}$$
$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ d & 0 & c & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{vmatrix} &= a\begin{vmatrix} c & 0 & d \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} 0 & c & d \\ d & 0 & 0 \\ 0 & b & a \end{vmatrix} \\ &= a\left(c\begin{vmatrix} c & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} 0 & c \\ b & 0 \end{vmatrix}\right) + b\left(-d\begin{vmatrix} c & d \\ b & a \end{vmatrix}\right) \\ &= a(ac^2 - bcd) - bd(ac - bd) \\ &= a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd = (ac - bd)^2, \end{aligned} \tag{9.14}$$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} = ab \begin{vmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = abcd, \tag{9.15}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a \begin{vmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & 0 \end{vmatrix} = -ab \begin{vmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{vmatrix} = abcd. \tag{9.16}$$

■

3. Tiga orang tukang cat, yaitu Joni, Deni, dan Ari, biasa bekerja secara bersama-sama. Mereka bertiga dapat mengecat bagian luar sebuah rumah dalam waktu 10 jam kerja. Pengalaman Deni dan Ari pernah bekerja bersama-sama mengecat rumah yang serupa dalam waktu 15 jam kerja. Suatu hari, ketiga tukang cat ini bekerja mengecat rumah serupa selama 4 jam kerja, tetapi belum selesai. Setelah itu, Ari pergi karena ada suatu keperluan mendadak. Joni dan Deni terpaksa melanjutkan pekerjaan itu dengan tambahan waktu 8 jam kerja sampai menyelesaikan pengecatan rumah. Tentukan waktu yang dibutuhkan masing-masing tukang cat tersebut, jika mereka masing-masing bekerja sendirian. (Petunjuk: Gunakan metode determinan alias aturan Cramer.)

   Jawaban. Andaikan waktu yang dibutuhkan Joni, Deni, dan Ari, berturut-turut adalah J, D, dan A, maka $1/J + 1/D + 1/A = 1/10$ dan $1/D + 1/A = 1/15$. Bagian yang sudah selesai dikerjakan adalah $4(1/J+1/D+1/A) = 4/10 = 2/5$. Bagian yang belum selesai dan akan dikerjakan adalah $N = 1 - 2/5 = 3/5$, sehingga $1/J + 1/D = N/8 = 3/40$. Penyajian matriksnya adalah

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/J \\ 1/D \\ 1/A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/10 \\ 1/15 \\ 3/40 \end{pmatrix}. \tag{9.17}$$

   Dengan aturan Cramer diperoleh $J = 30$, $D = 24$, dan $A = 40$. ■

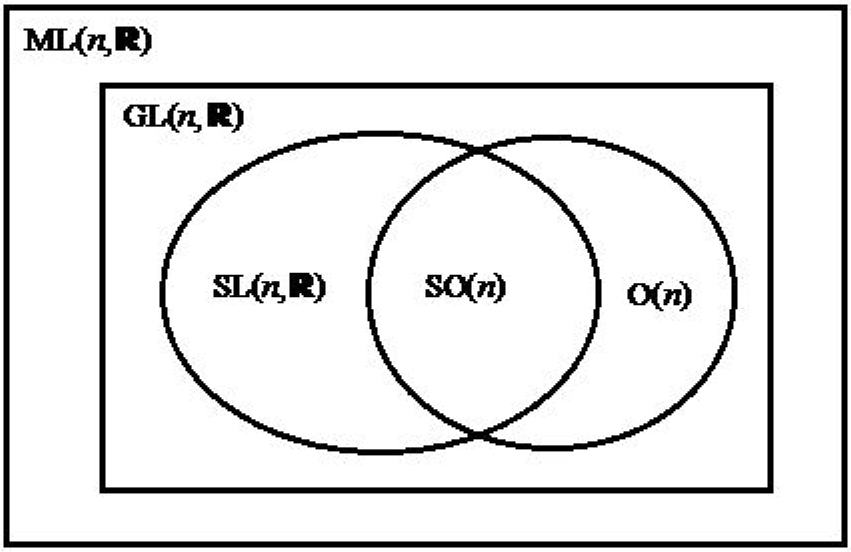
4. Apabila A dan B merupakan matriks bujur sangkar yang dimensinya sama, dan 0 adalah matriks nol bujur sangkar yang dimensinya sama dengan A dan B, maka penyelesaian dari persamaan matriks $AB = 0$ yang adalah $A = 0$ atau $B = 0$ itu bukanlah satu-satunya penyelesaian. Bagaimanakah seharusnya penyelesaian umumnya?

5. Tentukan semua anggota dari grup SO(3) dan grup SU(2).

   Jawaban. Lihat sesi 7.44 dan 7.45. ■

6. Buktikan bahwa perkalian matriks bersifat asosiatif, yaitu $A(BC) = (AB)C$.

   Jawaban. $(A(BC))_{jk} = A_{jl}(BC)_{lk} = A_{jl}B_{lm}C_{mk} = (AB)_{jm}C_{mk} = ((AB)C)_{jk}$. ■



Gambar 9.1: Diagram Venn Grup Matriks Riil

7. Apabila determinan suatu matriks bujur sangkar A sama dengan nol, yaitu $\det A = 0$, maka apakah adjugat-nya secara otomatis juga merupakan matriks nol bujur sangkar, yaitu $\mathrm{adj}\, A = 0$? Berikan alasannya.

8. Apabila A merupakan matriks bujur sangkar, maka buktikan bahwa $A\, \mathrm{adj}\, A = 1 \det A$. (Petunjuk: Carilah invers dari A, yaitu A^{-1}.)

   Jawaban. $A^{-1} 1 = (\mathrm{adj}\, A)/(\det A)$ alias $1 \det A = A\, \mathrm{adj}\, A$. ■

9. Gambarlah dalam diagram Venn untuk himpunan-himpunan matriks, yaitu grup-grup $ML(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{R})$, $O(n)$, dan $SO(n)$.

   Jawaban. Diagram Venn tersebut tampak pada Gambar 9.1. ■

10. Carilah syarat agar n buah vektor berikut ini, yaitu $\vec{a}_j := \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \hat{x}_k$ untuk semua $j \in \{1, 2, 3, \cdots, n\}$, bebas linier.

    Jawaban.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{9.18}$$

■

11. Carilah swa-nilai dan swa-vektor dari matriks $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

    Jawaban. Swa-nilai dari matriks tersebut adalah μ sedemikian

$$\begin{vmatrix} 5-\mu & -2 \\ -2 & 2-\mu \end{vmatrix} = 0 \quad \text{alias} \quad \mu^2 - 7\mu + 6 = 0$$

$$\text{alias} \quad \mu = (7 \pm 5)/2 = \mu_\pm, \tag{9.19}$$

sehingga $\mu_+ = 6$ dan $\mu_- = 1$.

Swa-vektor dari $\mu_\pm$ adalah

$$V_\pm := \begin{pmatrix} x_\pm \\ y_\pm \end{pmatrix} \tag{9.20}$$

sedemikian $(5-\mu_\pm)x_\pm - 2y_\pm = 0$ alias $\frac{1}{4}(3 \mp 5)x_\pm = y_\pm$, disertai syarat $x_\pm^2 + y_\pm^2 = 1$ alias $(1+(1/8)(17 \mp 15))x_\pm^2 = 1$ alias $x_\pm^2 = 8/(25 \mp 15)$ alias $x_\pm = 2\sqrt{2}/\sqrt{25 \mp 15}$. ■

12. Apabila A dan B adalah matriks bujur sangkar yang dimensinya sama, maka buktikan bahwa $\mathrm{Tr}(BA) = \mathrm{Tr}(AB)$, di mana Tr adalah operator lacak (*trace*).

    Jawaban. $\mathrm{Tr}(BA) = (BA)_{jj} = B_{jk}A_{kj} = A_{kj}B_{jk} = (AB)_{kk} = \mathrm{Tr}(AB)$. ■

13. Untuk setiap $A \in ML(2, \mathbb{R})$, buktikan bahwa swa-nilai dari A adalah

$$\mu_A = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Tr}\, A \pm \sqrt{(\mathrm{Tr}\, A)^2 - 4 \det A}\right). \tag{9.21}$$

    (Petunjuk: Gunakan definisi swa-nilai matriks).

    Jawaban.

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} a_{11} - \mu_A & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \mu_A \end{vmatrix} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (a_1 1 - \mu_A)(a_{22} - \mu_A) - a_{12}a_{21} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \mu_A^2 - (a_{11} + a_{22})\mu_A + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \mu_A = \frac{1}{2}\left((a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \mu_A = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Tr}\, A \pm \sqrt{(\mathrm{Tr}\, A)^2 - 4 \det A}\right). \qquad (9.22)
\end{aligned}$$

■

14. Mengapa matriks yang memiliki invers harus matriks bujur sangkar?

    Jawaban. Karena rumus invers matriks adalah $A^{-1} = (\mathrm{adj}\, A)/(\det A)$. Operator adjugat adj dan determinan det hanya bekerja pada matriks bujur sangkar. ■

15. Untuk setiap $A, B \in ML(n, \mathbb{R})$, buktikan bahwa $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

    Jawaban.

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \epsilon_{j_1 \cdots j_n}(AB)_{j_1 1} \cdots (AB)_{j_n n} \\
&= \epsilon_{j_1 \cdots j_n} A_{j_1 k_1} B_{k_1 1} \cdots A_{j_n k_n} B_{k_n n} \\
&= \epsilon_{j_1 \cdots j_n} A_{j_1 k_1} \cdots A_{j_n k_n} B_{k_1 1} \cdots B_{k_n n} \\
&= (\det A)\epsilon_{k_1 \cdots k_n} B_{k_1 1} \cdots B_{k_n n} = (\det A)(\det B). \qquad (9.23)
\end{aligned}$$

■

16. Tentukan semua kemungkinan determinan dari matriks anggota grup $O(n)$ dan $U(n)$. (Petunjuk: Gunakan sifat determinan serta definisi $O(n)$ dan $U(n)$.)

    Jawaban. Misalkan $A \in O(n)$ maka $A^{\mathrm{T}}A = 1$ sehingga $\det(A^{\mathrm{T}}A) = \det 1$ alias $(\det A^{\mathrm{T}})(\det A) = 1$ alias $(\det A)^2 = 1$ alias $\det A = \pm 1$. Misalkan $B \in U(n)$ maka $B^\dagger B = 1$ sehingga $\det(B^\dagger B) = \det 1$ alias $(\det B^\dagger)(\det B) = 1$ alias $|\det B|^2 = 1$ alias $\det B = e^{i\alpha}$ untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$. ■

17. Buktikan identitas $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$.

    Jawaban. $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = \epsilon_{jkl} A_k B_l \epsilon_{jmn} C_m D_n = (\delta_{km}\delta_{ln} - \delta_{kn}\delta_{lm}) A_k B_l C_m D_n = A_k B_l C_k D_l - A_k B_l C_l D_k = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$. ■

18. Tentukan bayangan dari titik $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ akibat transformasi pencerminan oleh bidang datar $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = d\}$ di mana $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ dan $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. (Petunjuk: Gunakan aljabar dan analisis vektor.)

    Jawaban. Apabila $\vec{r} := (x, y, z)$, maka bayangannya adalah $\vec{r}\,' := \vec{r} + (k - 1)(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \hat{N}\hat{N}$ di mana $k = -1$, $\vec{r}_0 := (0, 0, d/c)$, $\hat{N} := \vec{N}/N$, $\vec{N} := (a, b, c)$, dan $N := |\vec{N}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, sehingga $k - 1 = -2$ dan $\vec{r} - \vec{r}_0 = (x, y, z - d/c)$. Jadi,

    $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 2\frac{ax + by + cz - d}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \tag{9.24}$$

    ■

19. Buktikan $\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A}$.

    Jawaban.

    $$\begin{aligned} \nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) &= \delta_{jk}\delta_{lm}\hat{x}_j \partial_k (A_l B_m) \\ &= (\epsilon_{njl}\epsilon_{nkm} + \delta_{jm}\delta_{kl})\hat{x}_j (B_m \partial_k A_l + A_l \partial_k B_m) \\ &= \epsilon_{njl}\epsilon_{nkm}\hat{x}_j B_m \partial_k A_l + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}. \end{aligned} \tag{9.25}$$

    Karena $\epsilon_{njl}\epsilon_{nkm} - \epsilon_{njm}\epsilon_{nkl} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$, maka $\epsilon_{njl}\epsilon_{nkm}\hat{x}_j B_m \partial_k A_l = (\epsilon_{njm}\epsilon_{nkl} + \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})\hat{x}_j B_m \partial_k A_l = \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A})$, sehingga

    $$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A}. \tag{9.26}$$

    ■

20. Buktikan $\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + (\nabla \cdot \vec{B})\vec{A} - (\nabla \cdot \vec{A})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}$.

    Jawaban. $\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \epsilon_{jkl}\hat{x}_j \partial_k (\epsilon_{lmn} A_m B_n) = (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km})\hat{x}_j \partial_k (A_m B_n) = \hat{x}_j \partial_k (A_j B_k) - \hat{x}_j \partial_k (A_k B_j) = \hat{x}_j B_k \partial_k A_j + \hat{x}_j A_j \partial_k B_k - \hat{x}_j B_j \partial_k A_k - \hat{x}_j A_k \partial_k B_j = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + (\nabla \cdot \vec{B})\vec{A} - (\nabla \cdot \vec{A})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}$. ■

21. Buktikan $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$.

Jawaban. $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \epsilon_{jkl}\hat{x}_j \partial_k(\epsilon_{lmn}\partial_m A_n) = (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km})\hat{x}_j \partial_k \partial_m A_n = \hat{x}_j \partial_k \partial_j A_k - \hat{x}_j \partial_k \partial_k A_j = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$. ■

22. Apabila $\vec{r}$ adalah vektor posisi dan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi riil, maka buktikan bahwa $\nabla f(|\vec{r}|) = (\vec{r}/|\vec{r}|) df(|\vec{r}|)/d|\vec{r}|$.

Jawaban. $\nabla f(|\vec{r}|) = \hat{x}_j \partial_j f(|\vec{r}|) = \hat{x}_j \partial_j |\vec{r}| df(|\vec{r}|)/d|\vec{r}| = \hat{x}_j \partial_j (x_k x_k)^{1/2} df(|\vec{r}|)/d|\vec{r}| = \hat{x}_j (1/2)(1/|\vec{r}|) 2x_j df(|\vec{r}|)/d|\vec{r}| = (\vec{r}/|\vec{r}|) df(|\vec{r}|)/d|\vec{r}|$. ■

9.3 Paket C

1. Seperti kita ketahui bahwa suhu sebuah benda atau materi itu merupakan tampilan makroskopis dari perilaku gerak partikel-partikel mikroskopis penyusun benda tersebut. Semakin besar energi kinetik partikel-partikel penyusun benda, semakin tinggi pula suhu benda tersebut, sehingga suhu mutlak (dalam kelvin) sebuah benda sebanding dengan energi kinetik partikel-partikel penyusun benda tersebut. Kita juga mengetahui bahwa kalor dari matahari dapat merambat ke bumi dengan cara radiasi (pancaran), bahkan tanpa melalui zat perantara. Padahal, ruang antara bumi dan matahari adalah ruang hampa udara, di mana tidak ada partikel perantara. Pertanyaannya adalah sebagai berikut. Apabila kalor dari matahari merambat melalui ruang hampa, maka apakah di ruang hampa tersebut terjadi perbedaan suhu? Apakah suhu di ruang hampa itu selalu nol mutlak kelvin, mengingat energi kinetik di sana nol oleh sebab tidak ada partikel?

2. Carilah transformasi Fourier dari delta Dirac δ.

Jawaban.

$$(F(\delta))(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \left(\frac{1_f}{\sqrt{2\pi}}\right)(\omega) \tag{9.27}$$

sehingga $F(\delta) = 1_f/\sqrt{2\pi}$. ■

3. Apabila $F : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{C})$ adalah transformasi Fourier, buktikan bahwa

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(F(f))(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt, \tag{9.28}$$

yang merupakan identitas Parseval untuk transformasi Fourier.

Jawaban.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}|(F(f))(t)|^2dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(f(\omega))^*f(\omega')e^{i(\omega'-\omega)}d\omega\, d\omega' dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(f(\omega))^*f(\omega')\delta(\omega'-\omega)d\omega' d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}|f(\omega)|^2d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt. \end{aligned} \tag{9.29}$$

■

4. Apabila $F : C^{\infty}(\mathbb{R}) \to C^{\infty}(\mathbb{C})$ adalah transformasi Fourier, buktikan bahwa

$$(F^{-1}(f))(\omega) = (F(f))(-\omega). \tag{9.30}$$

Jawaban.

$$(F^{-1}(f))(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = (F(f))(-\omega). \tag{9.31}$$

■

5. Apabila $F : C^{\infty}(\mathbb{R}) \to C^{\infty}(\mathbb{C})$ adalah transformasi Fourier, dan $1_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi sedemikian $1_f(t) = 1$, buktikan bahwa $F(1_f) = \pm\sqrt{2\pi}\delta$, di mana δ adalah delta Dirac.

Jawaban.

$$\begin{aligned}(F(1_f))(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}dt \\ &= \sqrt{2\pi}\delta(\omega) = (\sqrt{2\pi}\delta)(\omega) \end{aligned} \tag{9.32}$$

sehingga $F(1_f) = \sqrt{2\pi}\delta$. ■

6. Buktikan bahwa operasi konvolusi $*$ fungsi atau sinyal, yaitu $f, g, h \in C^{\infty}(\mathbb{C})$, bersifat komutatif [yaitu $g * f = f * g$], asosiatif [yaitu $f * (g * h) = (f * g) * h$], dan linier [yaitu $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$ dan $f * (\alpha g) = \alpha(f * g)$], di mana $\alpha \in \mathbb{C}$.

Jawaban.

$$\begin{aligned}(g * f)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)f(\tau)\, d\tau = -\int_{\infty}^{-\infty} g(u)f(t-u)\, du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)g(u)\, du = (f * g)(t) \end{aligned} \tag{9.33}$$

sehingga $g * f = f * g$.

$$\begin{aligned}
(f * (g * h))(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)(g * h)(\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau-u)h(u)du\, d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau-u)d\tau\, h(u)du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u-v)g(v)dv\, h(u)du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t-u)h(u)du = ((f * g) * h)(t) \qquad (9.34)
\end{aligned}$$

sehingga $f * (g * h) = (f * g) * h$.

$$\begin{aligned}
(f * (g+h))(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)(g+h)(\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)h(\tau)d\tau \\
&= (f * g)(t) + (f * h)(t) = (f * g + f * h)(t) \qquad (9.35)
\end{aligned}$$

sehingga $f * (g+h) = (f * g) + (f * h)$.

$$\begin{aligned}
(f * (\alpha g))(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)(\alpha g)(\tau)d\tau = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau \\
&= \alpha(f * g)(t) = (\alpha(f * g))(t) \qquad (9.36)
\end{aligned}$$

sehingga $f * (\alpha g) = \alpha(f * g)$. ■

7. Apabila $F : C^{\infty}(\mathbb{R}) \to C^{\infty}(\mathbb{C})$ adalah transformasi Fourier, dan $*$ adalah operasi konvolusi fungsi atau sinyal, maka buktikan bahwa

$$F(f * g) = \pm\sqrt{2\pi}F(f)F(g). \qquad (9.37)$$

Jawaban.

$$\begin{aligned}
(F(f)F(g))(\omega) &= (F(f))(\omega)(F(g))(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(s)e^{i\omega(s+t)}ds\right)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)ds\right)e^{i\omega t}dt \\
&= \pm\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f * g)(t)\right)e^{i\omega t}dt \\
&= \left(F\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f * g)\right)\right)(\omega) \\
\Longleftrightarrow\ F(f)F(g) &= F\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f * g)\right) \qquad (9.38)
\end{aligned}$$

sehingga $F(f * g) = \pm\sqrt{2\pi}F(f)F(g)$. ■

8. Selesaikan persamaan gerak getaran selaras teredam

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0, \tag{9.39}$$

di mana $m > 0$ adalah massa benda, $c > 0$ adalah tetapan kesebandingan redaman, dan $k > 0$ adalah tetapan pegas, dengan cara mencari simpangan horizontal pegas, yaitu x, yang bergantung pada waktu t, di mana $\dot{x} := dx/dt$ dan $\ddot{x} := d\dot{x}/dt$, untuk kasus (a) teredam lanjut atau kuat ($c^2 - 4mk > 0$), (b) teredam kritis ($c^2 - 4mk = 0$), dan (c) teredam lampau atau lemah ($c^2 - 4mk < 0$).

Jawaban. (a) $x = A_+e^{\alpha_+ t} + A_-e^{\alpha_- t}$ di mana $\alpha_\pm := (-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk})/(2m)$. (b) $x = (Ax + B)e^{-\gamma t}$ di mana $\gamma := c/(2m)$. (c) $x = e^{-\gamma t}(A_+e^{i\omega t} + A_-e^{-i\omega t})$ di mana $\gamma := c/(2m)$, $\omega := \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, dan $\omega_0 := \sqrt{k/m}$ Lalu, $x = e^{-\gamma t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$ di mana $A := A_+ + A_-$ dan $B := i(A_+ - A_-)$, sehingga $x = \mathcal{A}e^{-\gamma t}\cos(\omega t - \varphi)$ di mana $\mathcal{A} := \sqrt{A^2 + B^2}$ dan $\varphi := \operatorname{arctan}_2(A, B)$. ■

9. Persamaan gerak getaran selaras terpaksa adalah

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_{\text{ext}}, \tag{9.40}$$

di mana biasa dipilih gaya pemaksa $F_{\text{ext}} := F_0e^{i\omega t}$ agar lebih nyaman, sedemikian $i^2 = -1$. Kemudian, dicari solusinya, yaitu $x = Ae^{i(\omega t - \varphi)}$, di mana A adalah amplitudo getaran, ω adalah frekuensi sudut getaran gaya pemaksa F_{ext} tersebut, t adalah waktu, dan φ adalah sudut fase awal getaran. Carilah hubungan antara A dan ω, serta φ dan ω agar persamaan gerak tersebut terpenuhi.

Jawaban. $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0e^{i\omega t}$ yang penyelesaiannya adalah $x = Ae^{i(\omega t - \varphi)}$, sehingga $m\frac{d^2}{dt^2}(Ae^{i(\omega t - \varphi)}) + c\frac{d}{dt}(Ae^{i(\omega t - \varphi)}) + kAe^{i(\omega t - \varphi)} = F_0e^{i\omega t}$ alias $-m\omega^2 A + i\omega cA + kA = F_0(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Bagian riil dari persamaan terakhir adalah $A(k - m\omega^2) = F_0\cos\varphi$, sedangkan bagian imajinernya adalah $c\omega A = F_0\sin\varphi$, sehingga $\varphi = \operatorname{arctan}_2(k - m\omega^2, c\omega)$ serta $A^2(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2A^2 = F_0^2$ alias $A = F_0/\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}$. ■

10. Sebutkan 6 buah analogi besaran mekanik dan besaran elektronik.

Jawaban.

Mekanis	Elektronis
x (perpindahan)	q (muatan listrik)
$\dot{x}$ (kecepatan)	$\dot{q}$ (arus listrik)
m (massa)	L (induktansi)
k (tetapan pegas)	$1/C$ (invers kapasitansi)
c (hambatan redaman)	R (hambatan listrik)
F (gaya)	V (beda potensial)

■

11. Buktikan bahwa besar impedansi rangkaian arus dan tegangan listrik bolak-balik yang terdiri dari resistor R, induktor L, dan kapasitor C yang dirangkai (a) seri adalah

$$Z_S = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}, \tag{9.41}$$

serta (b) paralel adalah Z_P sedemikian

$$1/Z_P = \sqrt{1/R^2 + (\omega C - 1/(\omega L))^2}, \tag{9.42}$$

di mana ω adalah frekuensi sudut getaran elektronis tersebut.

Jawaban. (a) Karena $\tilde{Z}_S := R + i(\omega L - 1/(\omega C))$, maka $Z_S := |\tilde{Z}_S| = (R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2)^{1/2}$. (b) Karena $1/\tilde{Z}_P := 1/R + i(\omega C - 1/(\omega L))$, maka $1/Z_P = |1/\tilde{Z}_P| = (1/R^2 + (\omega C - 1/(\omega L))^2)^{1/2}$. ■

12. Hitunglah limit non-relativistik berikut ini.

$$\lim_{c\to\infty}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1\right) mc^2\right) \quad \text{dan} \quad \lim_{c\to\infty}\left(c\sqrt{p^2 + (mc)^2} - mc^2\right), \tag{9.43}$$

di mana m, v, dan p berturut-turut adalah massa, kelajuan, dan momentum partikel.

Jawaban.

$$\begin{aligned} T &= \lim_{c\to\infty}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1\right) mc^2\right) = \lim_{c\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{1-(v/c)^2}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} mc^2\right) \\ &= \lim_{c\to\infty}\left(\frac{1-(1-(v/c)^2)}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \frac{mc^2}{1+\sqrt{1-(v/c)^2}}\right) = \frac{1}{2}mv^2. \end{aligned} \tag{9.44}$$

$$\begin{aligned} T &= \lim_{c\to\infty}\left(c\sqrt{p^2+(mc)^2} - mc^2\right) = \lim_{c\to\infty}\frac{c^2(p^2+(mc)^2) - m^2c^4}{c\sqrt{p^2+(mc)^2} + mc^2} \\ &= \lim_{c\to\infty}\frac{p^2}{\sqrt{(p/c)^2+m^2} + m} = \frac{p^2}{2m}. \end{aligned} \tag{9.45}$$

■

9.4 Paket D

1. Buktikan bahwa luas permukaan bola berjari-jari R adalah $A = 4\pi R^2$.

Jawaban.

$$A = \int_{\vec{r}\in S^2(R)} |d^2\vec{r}| = R^2 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\phi\, d\theta = 4\pi R^2. \tag{9.46}$$

■

2. Andaikan $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ adalah fungsi riil, dan $f(x,y,z) = 0$. Buktikan bahwa

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = 1 \quad \text{dan} \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -1. \tag{9.47}$$

Jawaban. Diketahui $Q := f(x,y,z) = 0$ di mana $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_{y,z} + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_{x,z} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = 0 \quad \text{alias} \quad \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = -\frac{(\partial Q/\partial x)_{y,z}}{(\partial Q/\partial y)_{x,z}}, \tag{9.48}$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_{x,z} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_{y,z} \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = 0 \quad \text{alias} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\frac{(\partial Q/\partial y)_{x,z}}{(\partial Q/\partial x)_{y,z}}, \tag{9.49}$$

sehingga

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left(-\frac{(\partial Q/\partial x)_{y,z}}{(\partial Q/\partial y)_{x,z}}\right) \left(-\frac{(\partial Q/\partial y)_{x,z}}{(\partial Q/\partial x)_{y,z}}\right) = 1. \tag{9.50}$$

Di samping itu,

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_{y,z} + \left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right)_{x,y} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = 0 \quad \text{alias} \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -\frac{(\partial Q/\partial x)_{y,z}}{(\partial Q/\partial z)_{x,y}}, \tag{9.51}$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right)_x = \left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right)_{x,y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_{x,z} \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = 0 \quad \text{alias} \quad \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -\frac{(\partial Q/\partial z)_{x,y}}{(\partial Q/\partial y)_{x,z}}, \tag{9.52}$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_{x,z} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_{y,z} \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = 0 \quad \text{alias} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\frac{(\partial Q/\partial y)_{x,z}}{(\partial Q/\partial x)_{y,z}}, \tag{9.53}$$

sehingga

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left(-\frac{(\partial Q/\partial x)_{y,z}}{(\partial Q/\partial z)_{x,y}}\right) \left(-\frac{(\partial Q/\partial z)_{x,y}}{(\partial Q/\partial y)_{x,z}}\right) \left(-\frac{(\partial Q/\partial y)_{x,z}}{(\partial Q/\partial x)_{y,z}}\right) = -1. \tag{9.54}$$

■

3. Andaikan $\vec{r}$ adalah vektor posisi, dan δ adalah delta Dirac. Buktikan bahwa

$$\nabla^2(1/|\vec{r}|) = -4\pi\delta(\vec{r}). \tag{9.55}$$

Jawaban. Lihat sesi 7.31. ■

4. Tuliskan teorema Stokes bentuk umum dalam bahasa geometri diferensial, kemudian sebutkan bentuk-bentuk khusus dari teorema Stokes tersebut.

Jawaban. Teorema Stokes dalam bentuk umum adalah

$$\oint_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega. \tag{9.56}$$

Bentuk-bentuk khusus teorema Stokes adalah persamaan (9.57), (9.60), (9.63), (9.66), (9.69), dan (9.71). ■

5. Andaikan $\vec{r}$ adalah vektor posisi, R_2 adalah manifold berdimensi 2, dan $\vec{A}$ adalah medan vektor. Buktikan bahwa

$$\oint_{\partial R_2} \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_{R_2} (\nabla\times\vec{A})\cdot d^2\vec{r}. \tag{9.57}$$

Jawaban. $\vec{A}\cdot d\vec{r} = A_x dx + A_y dy + A_z dz$ sehingga $d(\vec{A}\cdot d\vec{r}) = dA_x \wedge dx + dA_y \wedge dy + dA_z \wedge dz$. Karena $dx\wedge dy = -dy\wedge dx$, $dy\wedge dz = -dz\wedge dy$, $dz\wedge dx = -dx\wedge dz$, dan $dx\wedge dx = dy\wedge dy = dz\wedge dz = 0$, maka

$$d(\vec{A}\cdot d\vec{r}) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) dy\wedge dz + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) dz\wedge dx + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) dx\wedge dy. \tag{9.58}$$

Karena $d^2\vec{r} := \hat{x}dy\wedge dz + \hat{y}dz\wedge dx + \hat{z}dx\wedge dy$, maka menurut teorema Stokes, yaitu persamaan (9.56), diperoleh

$$\oint_{\partial R_2} \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_{R_2} d(\vec{A}\cdot d\vec{r}) = \int_{R_2} (\nabla\times\vec{A})\cdot d^2\vec{r}. \tag{9.59}$$

■

6. Andaikan $\vec{r}$ adalah vektor posisi, R_2 adalah manifold berdimensi 2, dan φ adalah medan skalar. Buktikan bahwa

$$\oint_{\partial R_2} \varphi\, d\vec{r} = -\int_{R_2} \nabla\varphi \times d^2\vec{r}. \tag{9.60}$$

Jawaban. Apabila $\vec{A} := \varphi\vec{C}$ dengan $\vec{C}$ adalah vektor konstan, maka dari persamaan (9.57), diperoleh

$$\vec{C}\cdot\oint_{\partial R_2} \varphi\, d\vec{r} = \int_{R_2} (\nabla\times(\varphi\vec{C}))\cdot d^2\vec{r} = \int_{R_2} (\nabla\varphi\times\vec{C})\cdot d^2\vec{r} = \int_{R_2} (d^2\vec{r}\times\nabla\varphi)\cdot\vec{C} \tag{9.61}$$

sehingga

$$\oint_{\partial R_2} \varphi\, d\vec{r} = \int_{R_2} d^2\vec{r}\times\nabla\varphi = -\int_{R_2} \nabla\varphi\times d^2\vec{r}. \tag{9.62}$$

■

7. Andaikan $\vec{r}$ adalah vektor posisi, R_2 adalah manifold berdimensi 2, dan $\vec{B}$ adalah medan vektor. Buktikan bahwa

$$\oint_{\partial R_2} \vec{B}\times d\vec{r} = \int_{R_2} [(\nabla\cdot\vec{B})d^2\vec{r} - (\nabla\otimes\vec{B})\cdot d^2\vec{r}]. \tag{9.63}$$

Jawaban. Apabila $\vec{A} := \vec{C} \times \vec{B}$ di mana $\vec{C}$ adalah vektor konstan, maka dari persamaan (9.57), diperoleh

$$\oint_{\partial R_2} (\vec{C} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} = \int_{R_2} (\nabla \times (\vec{C} \times \vec{B})) \cdot d^2\vec{r} = \int_{R_2} ((\nabla \cdot \vec{B})\vec{C} - (\vec{C} \cdot \nabla)\vec{B}) \cdot d^2\vec{r} \quad (9.64)$$

alias

$$\vec{C} \cdot \oint_{\partial R_2} \vec{B} \times d\vec{r} = \vec{C} \cdot \left(\int_{R_2} ((\nabla \cdot \vec{B}) d^2\vec{r} - (\nabla \otimes \vec{B}) \cdot d^2\vec{r}) \right). \quad (9.65)$$

■

8. Andaikan $\vec{r}$ adalah vektor posisi, R_3 adalah manifold berdimensi 3, dan $\vec{A}$ adalah medan vektor. Buktikan bahwa

$$\oint_{\partial R_3} \vec{A} \cdot d^2\vec{r} = \int_{R_3} (\nabla \cdot \vec{A}) d^3\vec{r}. \quad (9.66)$$

Jawaban. $\vec{A} \cdot d^2\vec{r} = A_x dy \wedge dz + A_y dz \wedge dx + A_z dx \wedge dy$ sehingga $d(\vec{A} \cdot d^2\vec{r}) = dA_x \wedge dy \wedge dz + dA_y \wedge dz \wedge dx + dA_z \wedge dx \wedge dy$. Oleh karena itu,

$$d(\vec{A} \cdot d^2\vec{r}) = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz = (\nabla \cdot \vec{A}) d^3\vec{r} \quad (9.67)$$

sehingga

$$\oint_{\partial R_3} \vec{A} \cdot d^2\vec{r} = \int_{R_3} d(\vec{A} \cdot d^2\vec{r}) = \int_{R_3} (\nabla \cdot \vec{A}) d^3\vec{r}. \quad (9.68)$$

■

9. Andaikan $\vec{r}$ adalah vektor posisi, R_3 adalah manifold berdimensi 3, dan φ adalah medan skalar. Buktikan bahwa

$$\oint_{\partial R_3} \varphi \, d^2\vec{r} = \int_{R_3} \nabla\varphi \, d^3\vec{r}. \quad (9.69)$$

Jawaban. Apabila $\vec{A} := \varphi\vec{C}$ dengan $\vec{C}$ adalah vektor konstan, maka menurut persamaan (9.66), diperoleh

$$\vec{C} \cdot \oint_{\partial R_3} \varphi \, d^2\vec{r} = \int_{R_2} \nabla \cdot (\varphi\vec{C}) d^3\vec{r} = \vec{C} \cdot \int_{R_3} \nabla\varphi \, d^3\vec{r}. \quad (9.70)$$

■

10. Andaikan $\vec{r}$ adalah vektor posisi, R_3 adalah manifold berdimensi 3, dan $\vec{B}$ adalah medan vektor. Buktikan bahwa

$$\oint_{\partial R_3} \vec{B} \times d^2\vec{r} = -\int_{R_3} \nabla \times \vec{B} \, d^3\vec{r}. \quad (9.71)$$

Jawaban. Apabila $\vec{A} := \vec{C}\times\vec{B}$ dengan $\vec{C}$ adalah vektor konstan, maka menurut persamaan (9.66), diperoleh

$$\oint_{\partial R_3} (\vec{C}\times\vec{B})\cdot d^2\vec{r} = \vec{C}\cdot\oint_{\partial R_3} \vec{B}\times d^2\vec{r} = \int_{R_2} \nabla\cdot(\vec{C}\times\vec{B})d^3\vec{r} = \int_{R_3} (-\vec{C}\cdot(\nabla\times\vec{B}))d^3\vec{r}. \tag{9.72}$$

■

11. Andaikan P dan Q adalah medan skalar yang keduanya bergantung pada x dan y, serta R_2 adalah manifold berdimensi 2. Buktikan bahwa

$$\oint_{\partial R_2} (P\,dx + Q\,dy) = \int_{R_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\wedge dy. \tag{9.73}$$

Jawaban. $d(P\,dx + Q\,dy) = dP\wedge dx + dQ\wedge dy = (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)dx\wedge dy$. ■

12. Andaikan Γ adalah simbol Christoffel, $\vec{e}_\mu$ adalah vektor basis kontravarian, $\vec{e}^\rho$ adalah vektor basis kovarian, dan q^ν adalah koordinat umum. Buktikan bahwa

$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = \vec{e}^\rho\cdot\frac{\partial\vec{e}_\mu}{\partial q^\nu}. \tag{9.74}$$

Jawaban. $\partial\vec{e}_\mu/\partial q^\nu = \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\vec{e}_\lambda$ sehingga $\vec{e}^\rho\cdot\partial\vec{e}_\mu/\partial q^\nu = \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\delta^\rho{}_\lambda = \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}$. ■

13. Andaikan Γ adalah simbol Christoffel, $\vec{e}_\mu$ adalah vektor basis kontravarian, $\vec{e}^\rho$ adalah vektor basis kovarian, dan q^ν adalah koordinat umum. Buktikan bahwa

$$\frac{\partial\vec{e}^\rho}{\partial q^\nu} = -\sum_{\lambda=1}^{n} \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda}\vec{e}^\lambda. \tag{9.75}$$

Jawaban. $\vec{e}^\mu\cdot\vec{e}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$ sehingga $(\partial\vec{e}^\mu/\partial q^\lambda)\cdot\vec{e}_\nu + \vec{e}^\mu\cdot\partial\vec{e}_\nu/\partial q^\lambda$ alias $(\partial\vec{e}^\mu/\partial q^\lambda)\cdot\vec{e}_\nu = -\Gamma^\alpha{}_{\nu\lambda}\delta^\mu{}_\alpha = -\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}$. Oleh karena itu, $\partial\vec{e}^\mu/\partial q^\lambda = ((\partial\vec{e}^\mu/\partial q^\lambda)\cdot\vec{e}_\nu)\vec{e}^\nu = -\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}\vec{e}^\nu$. ■

14. Andaikan Γ adalah simbol Christoffel, q^μ adalah koordinat umum, serta $g^{\mu\nu}$ dan $g_{\mu\nu}$ berturut-turut adalah komponen kovarian dan kontravarian dari tensor metrik $\overleftrightarrow{g}$. Buktikan bahwa

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sum_{\rho=1}^{n} g^{\lambda\rho}\left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial q^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial q^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^\rho}\right). \tag{9.76}$$

Jawaban.

$$g^{\lambda\rho}\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial q^\mu} = \Gamma^\sigma{}_{\rho\mu}g^{\lambda\rho}g_{\nu\sigma} + \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}. \tag{9.77}$$

$$g^{\lambda\rho}\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial q^\nu} = \Gamma^\sigma{}_{\rho\nu}g^{\lambda\rho}g_{\mu\sigma} + \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}. \tag{9.78}$$

$$g^{\lambda\rho}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^{\rho}} = \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\rho}g^{\lambda\rho}g_{\nu\sigma} + \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\rho}g^{\lambda\rho}g_{\mu\sigma}. \tag{9.79}$$

■

15. Andaikan $\vec{A} := \sum_{\mu=1}^{n} A^{\mu}\vec{e}_{\mu}$ adalah medan vektor, $\vec{e}_{\mu}$ adalah vektor basis kontravarian, dan $DA^{\mu}/\partial q^{\nu}$ adalah turunan kovarian. Buktikan bahwa

$$\nabla\cdot\vec{A} = \sum_{\mu=1}^{n}\frac{DA^{\mu}}{\partial q^{\mu}}. \tag{9.80}$$

Jawaban.

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\vec{A} &= \vec{e}^{\mu}\cdot\frac{\partial}{\partial q^{\mu}}(A^{\nu}\vec{e}_{\nu}) = \vec{e}^{\mu}\cdot\left(\frac{\partial A^{\nu}}{\partial q^{\mu}}\vec{e}_{\nu} + A^{\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}\vec{e}_{\lambda}\right) \\ &= \frac{\partial A^{\nu}}{\partial q^{\mu}}\delta^{\mu}{}_{\nu} + A^{\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\lambda} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial q^{\mu}} + A^{\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\nu\mu} = \frac{DA^{\mu}}{\partial q^{\mu}}. \end{aligned} \tag{9.81}$$

■

9.5 Paket E

1. Pembahasan tentang perilaku cahaya dengan menggunakan alat optik yang ukuran-ukuran optisnya relatif lebih besar daripada panjang gelombang cahaya disebut ... . [A] optika geometris [B] optika fisis [C] optika kuantum [D] opto-elektronika [E] optika klasik

   Jawaban. A. ■

2. Permukaan yang mampu memantulkan lebih dari 95% cahaya yang datang padanya disebut ... . [A] permukaan batas dua medium [B] permukaan Gauss [C] cermin [D] bidang yang memuat sinar datang, garis normal, dan sinar pantul [E] bidang yang tegak lurus garis normal

   Jawaban. C. ■

3. Sifat bayangan yang dibentuk oleh cermin datar adalah ... . [A] nyata, tegak, diperbesar [B] nyata, tegak, diperkecil [C] nyata, terbalik, diperbesar [D] maya, tegak, sama besar [E] maya, terbalik, sama besar

   Jawaban. C. ■

4. Bayangan yang terbentuk dari perpotongan langsung sinar-sinar cahaya disebut ... . [A] bayangan nyata [B] bayangan maya [C] bayangan tegak [D] bayangan terbalik [E] bayangan diperbesar

   Jawaban. A. ■

5. Bayangan yang dihasilkan dari perpotongan perpanjangan sinar-sinar cahaya disebut ... . [A] bayangan nyata [B] bayangan maya [C] bayangan tegak [D] bayangan terbalik [E] bayangan diperbesar

   Jawaban. B. ■

6. Berdasarkan hasil eksperimen, dapat disimpulkan bahwa jumlah bayangan yang dibentuk oleh dua buah cermin yang membentuk sudut α adalah ... . [A] $45°/\alpha - 1$ [B] $90°/\alpha - 1$ [C] $180°/\alpha - 1$ [D] $270°/\alpha - 1$ [E] $360°/\alpha - 1$

   Jawaban. E. ■

7. Pada cermin cembung atau cekung, apabila h dan h' berturut-turut adalah ketinggian benda dan bayangan yang mendekati nol, serta s dan s' berturut-turut adalah jarak benda dan bayangan ke cermin, maka hubungan yang benar adalah ... . [A] $h'/h = s'/s$ [B] $h'/h = -s'/s$ [C] $hh' = ss'$ [D] $hh' = -ss'$ [E] $s + h = s' + h'$

   Jawaban. B. ■

8. Sudut datang ketika sinar datang dibiaskan sebesar 90° disebut ... . [A] sudut pantul [B] sudut bias [C] sudut kritis [D] sudut belok [E] sudut siku-siku

   Jawaban. C. ■

9. Suatu pipa kecil panjang yang terbuat dari kaca plastik yang digunakan untuk menyalurkan cahaya maupun gelombang elektromagnetik disebut ... . [A] kabel [B] kawat [C] lensa tipis [D] serat optik [E] lensa tebal

   Jawaban. D. ■

10. Apabila sinar cahaya membias dari medium berindeks bias n_1 ke medium berindeks bias n_2 dengan $n_1 > n_2$, maka besarnya sudut kritis adalah i_k sedemikian rupa ... . [A] $\sin i_k = n_1/n_2$ [B] $\sin i_k = n_2/n_1$ [C] $\cos i_k = n_1/n_2$ [D] $\cos i_k = n_2/n_1$ [E] $\tan i_k = n_1/n_2$

    Jawaban. B. ■

11. Sekeping kaca yang kedua sisi pandangnya dibuat sejajar disebut ... . [A] prisma [B] lensa [C] cermin [D] kaca plan-paralel [E] permukaan lengkung

    Jawaban. D. ■

12. Benda yang terbuat dari gelas tembus cahaya (transparan) yang kedua sisinya dibatasi bidang permukaan yang membentuk sudut tertentu satu sama lain disebut ... . [A] prisma [B] lensa [C] cermin [D] kaca plan-paralel [E] permukaan lengkung

Jawaban. A. ■

13. Benda bening (tembus cahaya) yang terdiri atas dua permukaan lengkung disebut ... . [A] prisma [B] lensa [C] cermin [D] kaca plan-paralel [E] permukaan lengkung

    Jawaban. B. ■

14. Lensa konveks (lensa konvergen) yang bersifat mengumpulkan berkas sinar adalah ... . [A] lensa datar [B] lensa cembung [C] lensa cekung [D] bola bening [E] permukaan bening

    Jawaban. B. ■

15. Lensa konkaf (lensa divergen) yang bersifat menyebarkan berkas sinar adalah ... . [A] lensa datar [B] lensa cembung [C] lensa cekung [D] bola bening [E] permukaan bening

    Jawaban. C. ■

16. Apabila s dan s' berturut-turut adalah jarak benda dan bayangan titik ke lensa, maka perbesaran bayangannya bernilai ... . [A] $M = s'/s$ [B] $M = s/s'$ [C] $M = -s'/s$ [D] $M = -s/s'$ [D] $M = (s'/s)^2$

    Jawaban. C. ■

17. Apabila sebuah lensa memiliki jarak fokus f dan kekuatan lensa P, maka hubungan yang benar adalah ... . [A] $P = 1/f$ [B] $P = 2/f$ [C] $P = 3/f$ [D] $P = 4/f$ [E] $P = 5/f$

    Jawaban. A. ■

18. Cacat mata yang diakibatkan oleh bentuk kornea yang tidak sferis disebut ... . [A] miopi (rabun jauh) [B] hipermetropi (rabun dekat) [C] presbiopi (mata tua) [D] astigmatisma [E] hipometropi

    Jawaban. D. ■

19. Sekarang ini, dikenal dua macam teleskop secara garis besar, yaitu ... . [A] teleskop bias dan teleskop pantul [B] teleskop datang dan teleskop pantul [C] teleskop datang dan teleskop bias [D] teleskop kritis dan teleskop reras [E] teleskop kritis dan teleskop pantul

    Jawaban. A. ■

20. Alat untuk merekam suatu objek berupa tempat atau peristiwa disebut ... . [A] teleskop [B] kaca mata [C] kamera [D] proyektor [E] lup

    Jawaban. C. ■

21. Gelombang yang tidak memerlukan medium untuk merambat disebut ... . [A] gelombang mekanik [B] gelombang elektromagnetik [C] gelombang kebolehjadian [D] gelombang elektrik [E] gelombang magnetik

    Jawaban. B. ■

22. Beberapa sifat gelombang elektromagnetik adalah sebagai berikut, kecuali ... . [A] dapat merambat dalam ruang hampa [B] merupakan gelombang longitudinal [C] dapat mengalami pemantulan [D] dapat mengalami pembiasan [E] lintasan perambatannya tergantung pada distribusi indeks bias

    Jawaban. B. ■

23. Cahaya merupakan salah satu dari ... . [A] gelombang mekanik [B] gelombang elektromagnetik [C] gelombang kebolehjadian [D] gelombang elektrik [E] gelombang magnetik

    Jawaban. B. ■

24. Kelajuan gelombang elektromagnetik dalam ruang hampa selalu sebesar ... . [A] 300.000 m/s [B] 854.297.992 m/s [C] 299.792.458 m/s [D] 150.000.000 m/s [E] 150.000.000 km/s

    Jawaban. C. ■

25. Gelombang elektromagnetik yang memiliki panjang gelombang paling panjang adalah ... . [A] gelombang radio [B] gelombang televisi [C] gelombang mikro (radar) [D] sinar-X [E] sinar gamma

    Jawaban. A. ■

26. Gelombang elektromagnetik yang memiliki frekuensi paling tinggi adalah ... . [A] gelombang radio [B] gelombang televisi [C] gelombang mikro (radar) [D] sinar-X [E] sinar gamma

    Jawaban. E. ■

27. Hubungan yang benar antara frekuensi ν, panjang gelombang λ, dan kelajuan gelombang elektromagnetik c adalah ... . [A] $c = \lambda\nu$ [B] $\lambda = \nu c$ [C] $\nu = c\lambda$ [D] $\lambda = \nu/c$ [E] $c = \lambda/\nu$

    Jawaban. A. ■

28. Jika selang waktu antara pengiriman pulsa ke sasaran dan penerimaan pulsa pantulan dari sasaran adalah Δt, serta magnitudo kecepatan lurus gelombang elektromagnetik adalah c, maka jarak sasaran ke pusat radar adalah ... . [A] $\Delta s = c\Delta t$ [B] $\Delta s = \frac{1}{2}c\Delta t$ [C] $\Delta s = \frac{1}{3}c\Delta t$ [D] $\Delta s = \frac{1}{4}c\Delta t$ [E] $\Delta s = \frac{1}{5}c\Delta t$

    Jawaban. B. ■

29. Hubungan antara permitivitas vakum ϵ_0, permeabilitas vakum μ_0, kelajuan cahaya dalam ruang hampa c adalah ... . [A] $c^2\epsilon_0\mu_0 = 1$ [B] $c^2 = \epsilon_0\mu_0$ [C] $c^2\epsilon_0 = \mu_0$ [D] $c^2/\epsilon_0 = \mu_0$ [E] $c^2 = \epsilon_0/\mu_0$

    Jawaban. A. ■

30. Hubungan antara daya radiasi P, luas permukaan radiasi A, dan intensitas radiasi I adalah ... . [A] $I = P/A$ [B] $P = A/I$ [C] $A = I/P$ [D] $A = IP$ [E] $IPA = 1$

    Jawaban. A. ■

9.6 Paket F

1. Buktikan bahwa $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, dan $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

   Jawaban.

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt = -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-j)!} t^{n-j} e^{-t} \Bigg|_{t=0}^{t\to\infty} = n! \quad \text{dengan} \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{9.82}$$

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = -t^x e^{-t}|_{t=0}^{t\to\infty} + x\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x). \tag{9.83}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} dt \tag{9.84}$$

   sehingga

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \left(\int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} dt\right)\left(\int_0^\infty u^{-1/2} e^{-u} du\right). \tag{9.85}$$

   Apabila $t := x^2$ dan $u := y^2$, maka $dt = 2x\,dx$, $du = 2y\,dy$, $t^{-1/2} = x^{-1}$, dan $u^{-1/2} = y^{-1}$, sehingga

$$\begin{aligned}\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 &= \left(2\int_0^\infty e^{-x^2} dx\right)\left(2\int_0^\infty e^{-y^2} dy\right) = 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx\,dy \\ &= 4\int_0^\infty\int_0^{\pi/2} e^{-r^2} r\,d\theta\,dr = \pi\int_0^\infty e^{-r^2} d(r^2) = -\pi e^{-r^2}|_{r=0}^{r\to\infty} = \pi\end{aligned}$$

   sehingga $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. ■

2. Buktikan bahwa $B(y,x) = B(x,y)$ dan $B(x,y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$.

Jawaban.

$$\begin{aligned} B(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = -\int_1^0 (1-u)^{x-1}u^{y-1}du \\ &= \int_0^1 u^{y-1}(1-u)^{x-1}du = B(y,x). \end{aligned} \tag{9.86}$$

Apabila $t := u/a$, maka $u = at$ dan $dt = du/a$, serta

$$t^{x-1} = \frac{u^{x-1}}{a^{x-1}} \quad \text{dan} \quad (1-t)^{y-1} = \left(1 - \frac{u}{a}\right)^{y-1} = \frac{(a-u)^{y-1}}{a^{y-1}}. \tag{9.87}$$

$$B(x,y) = a^{1-x-y}\int_0^a u^{x-1}(a-u)^{y-1}du. \tag{9.88}$$

Apabila $t := \sin^2\theta$, maka $dt = 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$, $1-t = \cos^2\theta$, $t^{x-1} = (\sin\theta)^{2(x-1)}$ dan $(1-t)^{y-1} = (\cos\theta)^{2(y-1)}$, sehingga

$$B(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}d\theta. \tag{9.89}$$

Apabila $t := w/(1+w)$, maka $1-t = 1/(1+w)$, $w = t/(1-t)$, $dt = dw/(1+w)^2$, $t^{x-1} = w^{x-1}/(1+w)^{x-1}$, dan $(1-t)^{y-1} = 1/(1+w)^{y-1}$ sehingga

$$B(x,y) = \int_0^\infty \frac{w^{x-1}}{(1+w)^{x+y}}dw. \tag{9.90}$$

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty \int_0^\infty t^{x-1}u^{y-1}e^{-(t+u)}dt\, du. \tag{9.91}$$

Apabila $t := X^2$ dan $u := Y^2$, maka $dt \wedge du = 4XY\, dX \wedge dY$, $t^{x-1} = X^{2(x-1)}$, dan $u^{x-1} = Y^{2(y-1)}$, sehingga

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4\int_0^\infty \int_0^\infty X^{2x-1}Y^{2y-1}e^{-(X^2+Y^2)}dX\, dY. \tag{9.92}$$

Apabila $X := R\cos\Theta$ dan $Y := R\sin\Theta$, maka $dX \wedge dY = R\, d\Theta \wedge dR$, sehingga

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= 4\int_0^\infty \int_0^{\pi/2} R^{2(x+y)-1}(\cos\Theta)^{2x-1}(\sin\Theta)^{2y-1}e^{-R^2}d\Theta\, dR \\ &= 2\left(\int_0^\infty R^{2(x+y)-1}e^{-R^2}dR\right)\left(2\int_0^{\pi/2}(\cos\Theta)^{2x-1}(\sin\Theta)^{2y-1}d\Theta\right). \end{aligned}$$

Apabila $R^2 =: S$, maka $2R\, dR = dS$, sehingga

$$\int_0^\infty R^{2(x+y)-1}e^{-R^2}dR = \frac{1}{2}\int_0^\infty S^{x+y-1}e^{-S}dS = \frac{1}{2}\Gamma(x+y). \tag{9.93}$$

Jadi, $\Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(x+y)B(x,y)$. ■

3. Sebutkan 3 (tiga) bentuk definisi fungsi beta yang Saudara ketahui.

   Jawaban. Lihat jawaban nomor 2. ■

4. Buktikan bahwa $\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$ dan $P(-\infty, x) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{erf}(x/\sqrt{2}))$.

   Jawaban.
$$\operatorname{erf}(-x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-x} e^{-t^2} dt = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x} e^{-u^2} du = -\operatorname{erf}(x). \tag{9.94}$$
$$P(-\infty, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2/2} dt + \int_0^x e^{-t^2/2} dt \right). \tag{9.95}$$
$$\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{dan} \quad \int_0^x e^{-t^2/2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right). \tag{9.96}$$
   Jadi, $P(-\infty, x) = (1/2)(1 + \operatorname{erf}(x/\sqrt{2}))$. ■

5. Buktikan bahwa $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$ dan $\operatorname{erf}(\infty) = 1$.

   Jawaban.
$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^x e^{-t^2} dt \right) = 1 - \operatorname{erf}(x). \tag{9.97}$$
$$\operatorname{erf}(\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1. \tag{9.98}$$
   ■

6. Buktikan bahwa $\frac{d}{du} \operatorname{sn} u = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$ dan $\frac{d}{du} \operatorname{cn} u = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u$.

   Jawaban.
$$\frac{d}{du} \operatorname{sn} u = \frac{d}{du} \sin \operatorname{amp} u = \cos \operatorname{amp} u \frac{d}{du} \operatorname{amp} u = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u. \tag{9.99}$$
$$\frac{d}{du} \operatorname{cn} u = \frac{d}{du} \cos \operatorname{amp} u = -\sin \operatorname{amp} u \frac{d}{du} \operatorname{amp} u = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u. \tag{9.100}$$
   ■

7. Buktikan bahwa $\tanh \operatorname{gd} w = \sinh w$ dan $\sin \operatorname{gd} w = \tanh w$.

   Jawaban. Apabila $w := \ln(\sec\varphi + \tan\varphi)$, maka $\varphi = \operatorname{gd} w$, sehingga $\sec \operatorname{gd} w + \tan \operatorname{gd} w = e^w$ alias $\sec \operatorname{gd} w = e^w - \tan \operatorname{gd} w$, lalu $\sec^2 \operatorname{gd} w = 1 + \tan^2 \operatorname{gd} w = e^{2w} + \tan^2 \operatorname{gd} w - 2e^w \tan \operatorname{gd} w$ alias $2e^w \tan \operatorname{gd} w = e^{2w} - 1$ alias $\tan \operatorname{gd} w = \frac{1}{2}(e^w + e^{-w}) = \sinh w$. Karena $1 + \sin \operatorname{gd} w = e^w \cos \operatorname{gd} w$ alias $1 + 2\sin \operatorname{gd} w + \sin^2 \operatorname{gd} w = e^{2w} \cos^2 \operatorname{gd} w = e^{2w}(1 - \sin^2 \operatorname{gd} w)$ alias $(1 + e^{2w}) \sin \operatorname{gd} w + 2\sin \operatorname{gd} w + (1 - e^{2w}) = 0$, maka $\sin \operatorname{gd} w = (e^{2w} - 1)/(e^{2w} + 1) = (e^w - e^{-w})/(e^w + e^{-w}) = \tanh w$. ■

8. Buktikan bahwa $\cos \operatorname{gd} w = \operatorname{sech} w$ dan $\sec \operatorname{gd} w = \cosh w$.

   Jawaban.
$$\cos \operatorname{gd} w = \frac{\sin \operatorname{gd} w}{\tan \operatorname{gd} w} = \frac{\tanh w}{\sinh w} = \operatorname{sech} w. \tag{9.101}$$
$$\sec \operatorname{gd} w = \frac{1}{\cos \operatorname{gd} w} = \frac{1}{\operatorname{sech} w} = \cosh w. \tag{9.102}$$
■

9. Buktikan bahwa $\cot \operatorname{gd} w = \operatorname{csch} w$ dan $\csc \operatorname{gd} w = \coth w$.

   Jawaban.
$$\cot \operatorname{gd} w = \frac{1}{\tan \operatorname{gd} w} = \frac{1}{\sinh w} = \operatorname{csch} w. \tag{9.103}$$
$$\csc \operatorname{gd} w = \frac{1}{\sin \operatorname{gd} w} = \frac{1}{\tanh w} = \coth w. \tag{9.104}$$
■

10. Buktikan bahwa $\operatorname{gd} w = 2n\pi - \frac{\pi}{2} + 2 \arctan e^w$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$.

    Jawaban. $w = \ln(\sec\varphi + \tan\varphi) = \ln\tan(\pi/4 + \varphi/2)$, maka $e^w = \tan(\pi/4 + \varphi/2 - n\pi)$ untuk semua $n \in \mathbb{Z}$, sehingga $\arctan e^w = \pi/4 + \varphi/2 - n\pi$ alias $\arctan e^w - \pi/4 + n\pi = \varphi/2$ alias $\varphi = \operatorname{gd} w = 2\arctan e^w - \pi/2 + 2n\pi$. ■

11. Buktikan bahwa $\frac{d}{dw} \operatorname{gd} w = \operatorname{sech} w = \cos \operatorname{gd} w$.

    Jawaban.
$$\frac{d}{dw} \tan \operatorname{gd} w = \sec^2 \operatorname{gd} w \frac{d}{dw} \operatorname{gd} w = \frac{d}{dw} \sinh w = \cosh w$$
$$\Leftrightarrow \quad \cosh^2 w \frac{d}{dw} \operatorname{gd} w = \cosh w \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dw} \operatorname{gd} w = \operatorname{sech} w = \cos \operatorname{gd} w.$$
■

12. Buktikan bahwa $\operatorname{sn} F(0,\phi) = \sin F(0,\phi)$ dan $\operatorname{cn} F(0,\phi) = \cos F(0,\phi)$.

    Jawaban.
$$\operatorname{sn}_0 F(0,\phi) = \sin \operatorname{amp}_0 F(0,\phi) = \sin\phi = \sin F(0,\phi). \tag{9.105}$$
$$\operatorname{cn}_0 F(0,\phi) = \cos \operatorname{amp}_0 F(0,\phi) = \cos\phi = \cos F(0,\phi). \tag{9.106}$$
■

13. Buktikan bahwa $\operatorname{amp} F(0,\phi) = F(0,\phi)$ dan $\operatorname{dn} F(0,\phi) = 1$.

Jawaban.

$$\operatorname{amp}_0 F(0,\phi) = \phi = \int_0^{\phi} d\phi = F(0,\phi). \tag{9.107}$$

$$\operatorname{dn}_0 F(0,\phi) = d\phi/dF(0,\phi) = 1/((d/d\phi)F(0,\phi)) = 1. \tag{9.108}$$

■

14. Buktikan bahwa $\operatorname{sn} F(1,\phi) = \tanh F(1,\phi)$ dan $\operatorname{cn} F(1,\phi) = \operatorname{sech} F(1,\phi)$.

    Jawaban.

$$\operatorname{sn}_1 F(1,\phi) = \sin \operatorname{amp}_1 F(1,\phi) = \sin \operatorname{gd} F(1,\phi) = \tanh F(1,\phi). \tag{9.109}$$

$$\operatorname{cn}_1 F(1,\phi) = \cos \operatorname{amp}_1 F(1,\phi) = \cos \operatorname{gd} F(1,\phi) = \operatorname{sech} F(1,\phi). \tag{9.110}$$

■

15. Buktikan bahwa $\operatorname{amp} F(1,\phi) = \operatorname{gd} F(1,\phi)$ dan $\operatorname{dn} F(1,\phi) = \operatorname{sech} F(1,\phi)$.

    Jawaban.

$$\operatorname{amp}_1 F(1,\phi) = \phi = \operatorname{gd} F(1,\phi). \tag{9.111}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{dn}_1 F(1,\phi) &= d\phi/dF(1,\phi) = 1/((d/d\phi)F(1,\phi)) = 1/\sec\phi = \cos\phi \\ &= \cos \operatorname{gd} F(1,\phi) = \operatorname{sech} F(1,\phi). \end{aligned} \tag{9.112}$$

■

16. Apabila J_p adalah fungsi Bessel, maka buktikan bahwa

$$J_p(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+1+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j+p}. \tag{9.113}$$

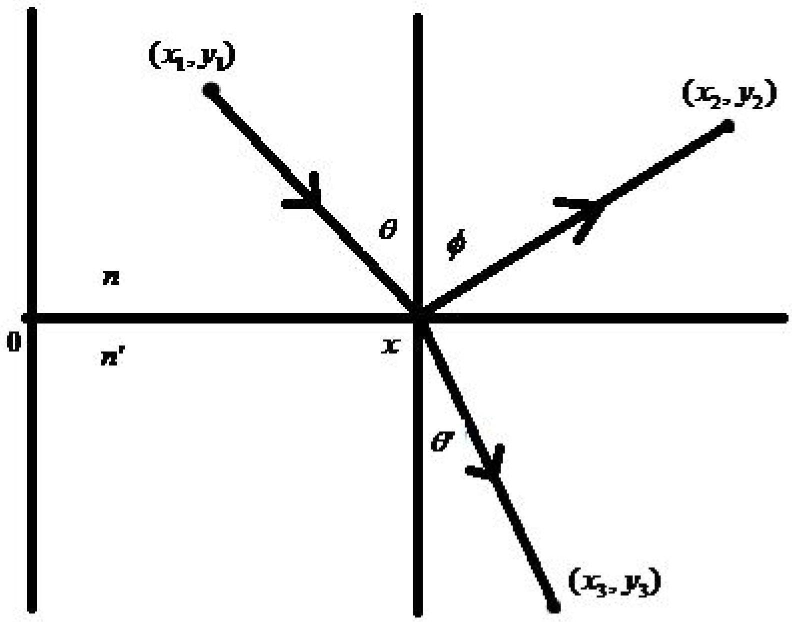
    Jawaban. Fungsi Bessel J_p adalah penyelesaian khusus dari persamaan Bessel $x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$, yaitu bahwa $y = J_p(x)$. ■

9.7 Paket G

1. Andaikan ruang $\mathbb{R}^3$ memiliki distribusi indeks bias n yang bergantung pada posisi $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ dan waktu $t \in \mathbb{R}$, yaitu $n \mapsto (\vec{r}, t)$. Tentukan persamaan gerak partikel cahaya akibat distribusi indeks bias semacam ini, menggunakan Kalkulus Variasi dan Asas Fermat.

    Jawaban. Lihat sesi 6.8. ■

2. Andaikan ruang $\mathbb{R}^3$ memiliki indeks bias n homogen di mana-mana. Buktikan bahwa segala kemungkinan kecepatan partikel cahaya di ruang tersebut adalah $\vec{v} = (c/n)\hat{v}$, di mana $\hat{v}$ adalah sebarang arah kecepatan gerak partikel cahaya.



Gambar 9.2: Pembuktian Hukum Snellius

Jawaban. Lihat sesi 6.8. ■

3. Andaikan ada lensa cembung tipis dengan jarak fokus f. Sebuah benda yang tingginya h mendekati nol terletak pada jarak s dari lensa tersebut melalui sumbu utama, ternyata memiliki bayangan yang tingginya h' mendekati nol yang terletak pada jarak s' dari lensa tersebut melalui sumbu utama. Buktikan bahwa $1/f = 1/s + 1/s'$ dan perbesaran bayangannya adalah $M := h'/h = -s'/s = f/(f-s)$.

   Jawaban. Lihat sesi 6.7. ■

4. Andaikan ruang $\mathbb{R}^3$ memiliki distribusi indeks bias n pada posisi $\vec{r} \in V(n) := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$ serta indeks bias n' pada posisi $\vec{r} \in V(n') := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < 0\}$. Andaikan ada sinar yang merambat dari ruang $V(n)$ yang dipantulkan sebagian dan sisanya dibiaskan menuju ruang $V(n')$ dengan sudut datang θ, sudut pantul ϕ, dan sudut bias θ'. Buktikan hukum Snellius untuk pemantulan, yaitu $\phi = \theta$, serta hukum Snellius untuk pembiasan, yaitu $n' \sin\theta' = n \sin\theta$.

   Jawaban. Perhatikan Gambar 9.2.

   $v = c/N = ds/dt$ alias $dt = (1/c)N\,ds$.

   $\Delta t := \int_{t_1}^{t_2} dt = (1/c)\int_{s_1}^{s_2} N\,ds$ dan $\delta(\Delta t) = 0$.

   $\Delta t_1 = (1/c)n(\sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2} + \sqrt{(x_2-x)^2 + y_2^2})$.

   $\delta(\Delta t_1) = (d/dx)(\Delta t_1)\delta x = 0$.

$$\frac{x-x_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+y_1^2}} + \frac{x-x_2}{\sqrt{(x_2-x)^2+y_2^2}} = 0 \tag{9.114}$$

alias $\sin\theta - \sin\phi = 0$ alias $\phi = \theta$.

$\Delta t_2 = (1/c)(n\sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2} + n'\sqrt{(x_3-x)^2 + y_3^2})$.

$\delta(\Delta t_2) = (d/dx)(\Delta t_2)\delta x = 0$.

$$\frac{n(x-x_1)}{\sqrt{(x-x_1)^2+y_1^2}} + \frac{n'(x-x_3)}{\sqrt{(x_3-x)^2+y_3^2}} = 0 \tag{9.115}$$

alias $n\sin\theta - n'\sin\theta' = 0$ alias $n'\sin\theta' = n\sin\theta$. ■

5. Andaikan ada kurva dengan posisi salah satu dari titik pada kurva $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ dengan parameter $t \in \mathbb{R}$. Buktikan bahwa evolut kurva tersebut adalah

$$\vec{s} = \vec{r} + |\dot{\vec{r}}|^2 \frac{\dot{\vec{r}} \times (\ddot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}})}{|\ddot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}|^2} \tag{9.116}$$

di mana $\dot{\vec{r}} := d\vec{r}/dt$ dan $\ddot{\vec{r}} := d\dot{\vec{r}}/dt$.

Jawaban. Evolut suatu kurva merupakan himpunan titik-titik pusat kelengkungan di setiap titik dari kurva tersebut. Untuk mencari pusat kelengkungan tersebut, mula-mula kurva hendak dianggap sebagai trayektori lintasan sebuah partikel titik dengan posisi $\vec{r}$ pada waktu t di $\mathbb{R}^3$. Tentu saja, kecepatan partikel tersebut pada saat t adalah $\vec{v} := \dot{\vec{r}}$ (dengan $\dot{Q} := dQ/dt$), serta percepatannya pada saat t adalah $\vec{a} := \dot{\vec{v}} := \ddot{\vec{r}}$. Percepatan sentripetal suatu partikel yang bergerak pada posisi $\vec{r}$ pada saat t adalah $\vec{a}_s := \vec{a} - (\vec{a}\cdot\hat{v})\hat{v}$ dengan $\hat{v} := \vec{v}/v$ dan $v = |\vec{v}|$ sedangkan besar percepatan sentripetalnya adalah $|\vec{a}_s| = v^2/|\vec{s}-\vec{r}|$ dengan $\vec{s}$ adalah posisi pusat kelengkungan kurva pada titik $\vec{r}$. Selain itu, harus berlaku juga bahwa $|\vec{a}_s|^2 = a^2 - (\vec{a}\cdot\hat{v})^2$ dengan $a := |\vec{a}|$. Tentu saja,

$$\begin{aligned} \vec{s}-\vec{r} &= |\vec{s}-\vec{r}|\frac{\vec{a}_s}{|\vec{a}_s|} = \frac{v^2\vec{a}_s}{|\vec{a}_s|^2} = \frac{v^2[\vec{a}-\hat{v}(\hat{v}\cdot\vec{a})]}{a^2-(\hat{\vec{v}}\cdot\vec{a})^2} \\ &= \frac{v^2[v^2\vec{a}-\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{a})]}{v^2a^2-(\vec{v}\cdot\vec{a})^2} = \frac{v^2(\vec{v}\times\vec{a})\times\vec{v}}{|\vec{v}\times\vec{a}|^2} = \frac{|\dot{\vec{r}}|^2(\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}})\times\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|^2}. \end{aligned} \tag{9.117}$$

Dengan demikian, $\{\vec{s}\}$ menjadi evolut bagi $\{\vec{r}\}$. ■

6. Buktikan bahwa unsur identitas dari grup konvolusi fungsi sinyal $(C^\infty(\mathbb{C}), *)$ adalah delta Dirac δ, serta invers grup tersebut dari fungsi sinyal $f \in C^\infty(\mathbb{C})$ adalah $g := (1/2\pi)F^{-1}(1_f/F(f))$ di mana $F : C^\infty(\mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ adalah transformasi Fourier.

Jawaban. Lihat sesi 7.52. ■

7. Buktikan persamaan geodesik

$$\frac{d^2q^l}{ds^2} + \Gamma^l{}_{ij}\frac{dq^i}{ds}\frac{dq^j}{ds} = 0, \tag{9.118}$$

di mana q^i adalah koordinat umum,

$$\Gamma^l{}_{ij} := \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right) \tag{9.119}$$

adalah lambang Christoffel alias koneksi Levi-Civita yang bebas torsi, serta g_{ij} adalah komponen tensor metrik. Di sini, dipakai kesepakatan penjumlahan Einstein.

Jawaban. Lihat sesi 7.55. ■

9.8 Paket H

1. Andaikan $*$ adalah operasi konvolusi antara fungsi-fungsi $f, g, h \in C^\infty(\mathbb{C})$, serta $\alpha \in \mathbb{C}$ adalah sebuah tetapan. Buktikan bahwa $g * f = f * g$, $f * (g * h) = (f * g) * h$, $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$, dan $f * (\alpha g) = \alpha(f * g)$.

   Jawaban. Lihat jawaban nomor 6 pada sesi 9.3. ■

2. Andaikan $F : C^\infty(\mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{C})$ adalah transformasi Fourier, serta $*$ adalah operasi konvolusi antara fungsi-fungsi $f, g \in C^\infty(\mathbb{C})$. Buktikan bahwa $F(f * g) = \pm\sqrt{2\pi} F(f) F(g)$.

   Jawaban. Lihat jawaban nomor 7 pada sesi 9.3. ■

3. Andaikan $T : C^\infty(\mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{C})$ adalah transformasi integral, $f, g \in C^\infty(\mathbb{C})$, serta $\beta \in \mathbb{C}$. Buktikan bahwa $T(f + g) = T(f) + T(g)$ dan $T(\beta f) = \beta T(f)$.

   Jawaban. Transformasi integral $T : C^\infty(\mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{C})$ didefinisikan sedemikian

   $$(T(f))(\alpha) = \int_a^b f(t) K(\alpha, t)\, dt \tag{9.120}$$

   untuk setiap $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dan $K : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

   Dari persamaan (9.120), diperoleh bahwa untuk setiap $f, g \in C^\infty(\mathbb{C})$ dan $\beta \in \mathbb{C}$, berlaku kaitan

   $$\begin{aligned} (T(f+g))(\alpha) &= \int_a^b (f+g)(t) K(\alpha,t)\, dt = \int_a^b (f(t) + g(t)) K(\alpha,t)\, dt \\ &= \int_a^b f(t) K(\alpha,t)\, dt + \int_a^b g(t) K(\alpha,t)\, dt = (T(f))(\alpha) + (T(g))(\alpha) \\ &= (T(f) + T(g))(\alpha) \end{aligned} \tag{9.121}$$

   dan

   $$\begin{aligned} (T(\beta f))(\alpha) &= \int_a^b (\beta f)(t) K(\alpha,t)\, dt = \beta \int_a^b f(t) K(\alpha,t)\, dt \\ &= \beta (T(f))(\alpha) = (\beta T(f))(\alpha). \end{aligned} \tag{9.122}$$

   Persamaan (9.121) dan (9.122) mengatakan bahwa transformasi integral T pada persamaan (9.120) bersifat linier. ■

4. Andaikan δ adalah delta Dirac 1-dimensi, serta u adalah fungsi undak satuan Heaviside. Buktikan bahwa

$$\int_a^b \delta(x-y)\,dx = u(y-a) - u(y-b). \tag{9.123}$$

Jawaban.

$$\int_a^b \delta(x-y)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)(u(x-a)-u(x-b))\,dx = u(y-a)-u(y-b). \tag{9.124}$$

■

9.9 Paket I

1. Gelombang dapat dikatakan sebagai getaran yang merambat dalam ruang. Apa yang menyebabkan sebuah getaran merambat? Apa alasannya?

Jawaban. Yang menyebabkan sebuah getaran mekanik merambat adalah medium di sekitarnya. Getaran mekanis tersebut mengimbas (mempengaruhi) gerakan medium di sekitarnya. Yang menyebabkan sebuah getaran elektromagnetik merambat adalah adanya persamaan Maxwell. Penyelesaian persamaan Maxwell menyebabkan besaran medan listrik dan medan magnet bergantung pada posisi dan waktu yang memenuhi keempat persamaan Maxwell. ■

2. Andaikan $x, y, z \in \mathbb{R}$, serta $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dan $f(x,y,z) = 0$. Buktikan bahwa

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = 1 \quad \text{dan} \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = -1. \tag{9.125}$$

Jawaban. Lihat jawaban nomor 2 pada sesi 9.4. ■

3. Selesaikan persamaan gelombang

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)_t\right)_t = \frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)_x\right)_x \tag{9.126}$$

di mana v adalah kelajuan gelombang yang konstan, dengan cara mencari $\Psi \mapsto (x,t)$.

Jawaban. Lihat jawaban nomor 7 pada sesi 9.1. ■

4. Superposisikan dua buah gelombang, yaitu $\Psi_1 := A\sin(k_1 x - \omega_1 t)$ dan $\Psi_2 := A\sin(k_2 x - \omega_2 t)$ dalam bentuk modulasi gelombang.

Jawaban.

$$
\begin{aligned}
\Psi_1 + \Psi_2 &= A[\sin(k_1 x + \omega_1 t) + \sin(k_2 x + \omega_2 t)] \\
&= 2A \sin \frac{1}{2}[(k_1 + k_2)x + (\omega_1 + \omega_2)t] \cos \frac{1}{2}[(k_1 - k_2)x + (\omega_1 - \omega_2)t].
\end{aligned}
$$

■

5. Buktikan bahwa kecepatan fase gelombang adalah $v_{\mathrm{ph}} := \omega/k = c^2/v$, dan kecepatan grup gelombang adalah $v_{\mathrm{gr}} := d\omega/dk = v$ apabila $\mathcal{E} = h\nu$, $p = h/\lambda$, $\omega = 2\pi\nu$, $k := 2\pi/\lambda$, $\hbar := h/(2\pi)$, $\mathcal{E} = mc^2$, $p = mv$, $m = m_0\gamma$, dan $\gamma := (1 - (v/c)^2)^{-1/2}$, serta (h, c, m_0) konstan.

   Jawaban. Lihat jawaban nomor 18 pada sesi 9.1. ■

9.10 Paket J

1. Hitunglah determinan dari matriks $A \in \mathrm{ML}(4, \mathbb{C})$.

   Jawaban. $\det A = \sum_{j_1,\cdots,j_4=1}^{4} \epsilon_{j_1 \cdots j_4} A_{j_1 1} \cdots A_{j_4 4}$. ■

2. Buktikan bahwa determinan suatu matriks $A \in \mathrm{ML}(n, \mathbb{C})$ tidak berubah apabila nomor baris dan nomor kolom matriks tersebut dipertukarkan, yaitu bahwa $\det(A^{\mathsf{T}}) = \det A$.

   Jawaban. $\det(A^{\mathsf{T}}) = \epsilon_{j_1 \cdots j_n} (A^{\mathsf{T}})_{j_1 1} \cdots (A^{\mathsf{T}})_{j_n n} = \epsilon_{j_1 \cdots j_n} A_{1 j_1} \cdots A_{n j_n} = \det A$. ■

3. Buktikan bahwa determinan suatu matriks $A \in \mathrm{ML}(n, \mathbb{C})$ yang dua baris tertentu dipertukarkan atau dua kolom tertentu dipertukarkan, nilainya sama dengan negatif dari determinan sebelumnya, yaitu sama dengan $-\det A$.

   Jawaban.

$$
\begin{aligned}
\det A' &= \epsilon_{j_1 \cdots j_n} A_{j_1 1} \cdots A_{j_{k-1}(k-1)} A_{j_k l} A_{j_{k+1}(k+1)} \cdots A_{j_{l-1}(l-1)} A_{j_l k} A_{j_{l+1}(l+1)} \cdots A_{j_n n} \\
&= \epsilon_{j_1 \cdots j_{k-1} j_l j_{k+1} \cdots j_{l-1} j_k j_{l+1} \cdots j_n} A_{j_1 1} \cdots A_{j_n n} \\
&= -\epsilon_{j_1 \cdots j_n} A_{j_1 1} \cdots A_{j_n n} = -\det A. \qquad (9.127)
\end{aligned}
$$

■

4. Andaikan $A, B, C \in \mathrm{ML}(n, \mathbb{C})$. Buktikan bahwa $A(BC) = (AB)C$.

   Jawaban. Lihat jawaban nomor 6 pada sesi 9.2. ■

5. Andaikan $A, B, C \in \mathrm{ML}(n, \mathbb{C})$ dan didefinisikan komutasi $[A, B] := AB - BA$. Buktikan bahwa $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$.

   Jawaban. $[A, BC] = ABC - BCA = ABC - BAC + BAC - BCA = (AB - BA)C + B(AC - CA) = [A, B]C + B[A, C]$. ■

6. Andaikan $A, B \in \mathrm{ML}(n, \mathbb{C})$. Buktikan bahwa $\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}\,A + \mathrm{Tr}\,B$.

   Jawaban. $\mathrm{Tr}(A+B) = (A+B)_{jj} = A_{jj} + B_{jj} = \mathrm{Tr}\,A + \mathrm{Tr}\,B$. ■

7. Andaikan $A, B \in \mathrm{ML}(n, \mathbb{C})$. Buktikan bahwa $\mathrm{Tr}(BA) = \mathrm{Tr}(AB)$.

   Jawaban. Lihat jawaban nomor 12 pada sesi 9.2. ■

8. Andaikan $A, B, C \in \mathrm{ML}(n, \mathbb{C})$. Buktikan bahwa $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(BCA) = \mathrm{Tr}(CAB)$ dan $\mathrm{Tr}(CBA) = \mathrm{Tr}(BAC) = \mathrm{Tr}(ACB)$ dari fakta bahwa $\mathrm{Tr}(BA) = \mathrm{Tr}(AB)$.

   Jawaban.

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(ABC) &= \mathrm{Tr}(A(BC)) = \mathrm{Tr}((BC)A) = \mathrm{Tr}(BCA) = \mathrm{Tr}(B(CA)) \\ &= \mathrm{Tr}((CA)B) = \mathrm{Tr}(CAB).\end{aligned} \tag{9.128}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(CBA) &= \mathrm{Tr}(C(BA)) = \mathrm{Tr}((BA)C) = \mathrm{Tr}(BAC) = \mathrm{Tr}(B(AC)) \\ &= \mathrm{Tr}((AC)B) = \mathrm{Tr}(ACB).\end{aligned} \tag{9.129}$$

■

9. Andaikan $A \in \mathrm{ML}(5, \mathbb{C})$. Hitunglah determinan dari minor $\min(A; 2; 3)$ dan $\min(A; 4; 5)$.

   Jawaban.

$$\det(\min(A;2;3)) = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{14} & A_{15} \\ A_{31} & A_{32} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{54} & A_{55} \end{vmatrix}. \tag{9.130}$$

$$\det(\min(A;4;5)) = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} \end{vmatrix}. \tag{9.131}$$

■

10. Andaikan $A \in \mathrm{ML}(n, \mathbb{C})$. Buktikan bahwa $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

    Jawaban. Lihat jawaban nomor 15 pada sesi 9.2. ■

11. Andaikan $A \in \mathrm{ML}(n, \mathbb{C})$ dan $\alpha \in \mathbb{C}$. Buktikan bahwa $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$.

    Jawaban. $\det(\alpha A) = \epsilon_{j_1 \cdots j_n} (\alpha A)_{j_1 1} \cdots (\alpha A)_{j_n n} = \alpha^n \epsilon_{j_1 \cdots j_n} A_{j_1 1} \cdots A_{j_n n} = \alpha^n \det A$. ■

12. Carilah invers dari matriks $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$, yaitu A^{-1}.

Jawaban. Misalkan

$$A^{-1} := \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}). \tag{9.132}$$

Melalui kaitan $AA^{-1} = 1$ dan aturan Cramer, diperoleh

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}. \tag{9.133}$$

■

13. Andaikan $A, B \in \mathrm{ML}(n,\mathbb{C})$. Buktikan bahwa $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$.

Jawaban.

$$\begin{aligned} ((AB)^\dagger)_{jk} &= ((AB)_{kj})^* = (A_{kl}B_{lj})^* = (A_{kl})^*(B_{lj})^* = (A^\dagger)_{lk}(B^\dagger)_{jl} \\ &= (B^\dagger)_{jl}(A^\dagger)_{lk} = (B^\dagger A^\dagger)_{jk}. \end{aligned} \tag{9.134}$$

■

14. Andaikan $A, B \in \mathrm{ML}(n,\mathbb{C})$. Buktikan bahwa $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Jawaban. $(AB)^{-1}(AB) = 1$ alias $(AB)^{-1}A = B^{-1}$ alias $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. ■

15. Tentukan secara eksplisit semua anggota dari grup SU(2).

Jawaban. Lihat sesi 7.45. ■

9.11 Paket K

1. Tentukan persamaan gerak untuk dua buah partikel klasik bermassa m_1 dan m_2, yang berturut-turut bermuatan q_1 dan q_2, serta berturut-turut terletak di posisi $\vec{r}_1$ dan $\vec{r}_2$ di ruang $\mathbb{R}^3$ pada waktu t akibat gaya interaksi gravitasi (Newton) dan listrik-magnet (Lorentz) non-relativistik.

Jawaban. Lihat sesi 5.1. ■

2. Buktikan keberlakuan hukum tegangan Kirchoff yang non-relativistik.

Jawaban.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j}{|\vec{r}-\vec{r}_j|^3}(\vec{r}-\vec{r}_j). \tag{9.135}$$

$$\oint_{\partial A}\vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_A (\nabla\times\vec{E})\cdot d^2\vec{r}. \tag{9.136}$$

$$\nabla\times\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{n} q_j\nabla\times\frac{\vec{r}-\vec{r}_j}{|\vec{r}-\vec{r}_j|^3}. \tag{9.137}$$

$$\nabla\times\frac{\vec{r}-\vec{r}_j}{|\vec{r}-\vec{r}_j|^3}=\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_j|^3}\times(\vec{r}-\vec{r}_j)+\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_j|^3}\nabla\times(\vec{r}-\vec{r}_j). \tag{9.138}$$

$$\begin{aligned}\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_j|^3} &= \hat{x}_k\partial_k[(x_l-x_{jl})(x_l-x_{jl})]^{-3/2}\\ &= -3\vec{x}_k|\vec{r}-\vec{r}_j|^{-5}\delta_{kl}(x_l-x_{jl})=-3(\vec{r}-\vec{r}_j)|\vec{r}-\vec{r}_j|^{-5}.\end{aligned} \tag{9.139}$$

$\nabla\times(\vec{r}-\vec{r}_j)=\epsilon_{klm}\hat{x}_k\partial_l(x_m-x_{jm})=\epsilon_{klm}\hat{x}_k\delta_{lm}=\epsilon_{kll}\hat{x}_k=\vec{0}$ sehingga

$$\nabla\times\vec{E}=\vec{0}\quad\text{lalu}\quad\oint_{\partial A}\vec{E}\cdot d\vec{r}=0. \tag{9.140}$$

■

3. Andaikan ada sebuah ruang volume $V\subset\mathbb{R}^3$. Andaikan $\vec{E}$ adalah medan listrik non-relativistik yang disebabkan oleh n buah muatan q_j^{in} yang berturut-turut terletak di posisi $\vec{r}_j^{\text{in}}\in V$ untuk semua $j\in\{1,\cdots,n\}$, dan oleh n' buah muatan q_k^{out} yang berturut-turut terletak di posisi $\vec{r}_k^{\text{out}}\notin V$ untuk semua $k\in\{1,\cdots,n'\}$. Buktikan hukum Gauss non-relativistik, yaitu

$$\oint_{\partial V}\vec{E}\cdot d^2\vec{r}=\frac{1}{\epsilon_0}\sum_{j=1}^{n}q_j^{\text{in}}, \tag{9.141}$$

di mana ϵ_0 adalah permitivitas listrik dalam ruang hampa.

Jawaban. Lihat sesi 5.4. ■

4. Carilah medan listrik $\vec{E}\mapsto(x,y,z)$ di ruang $\mathbb{R}^3$ akibat distribusi muatan listrik yang berbentuk bidang datar $P:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid z=0,p<x<q,r<y<s\}$ yang memiliki rapat muatan permukaan seragam σ, di mana (p,q,r,s) konstan.

Jawaban.

$$\vec{E}=\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_p^q\int_r^s\frac{\hat{x}(x-x')+\hat{y}(y-y')+\hat{z}z}{[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2]^{3/2}}dy'\,dx'. \tag{9.142}$$

■

5. Dari persamaan $\nabla\cdot\vec{B}=0$ dan $\nabla\times\vec{E}=-\partial\vec{B}/\partial t$, buktikan bahwa penyelesaiannya adalah $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$ dan $\vec{E}=-\nabla\varphi-\partial\vec{A}/\partial t$ untuk sebarang φ dan $\vec{A}$.

Jawaban. Karena $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=0$, maka $\nabla\cdot\vec{B}=0$ menghendaki $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$. Karena $\nabla\times\nabla\varphi=\vec{0}$, maka $\nabla\times\vec{E}=-\partial\vec{B}/\partial t$ menghendaki $\nabla\times\vec{E}=-\nabla\times\partial\vec{A}/\partial t$ alias $\nabla\times(\vec{E}+\partial\vec{A}/\partial t)=\vec{0}$ alias $\vec{E}+\partial\vec{A}/\partial t=-\nabla\varphi$ alias $\vec{E}=-\nabla\varphi-\partial\vec{A}/\partial t$. ■

6. Carilah medan $\vec{E}$ dan $\vec{B}$ yang bergantung pada posisi $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ dan waktu t dari sistem persamaan Maxwell, yaitu $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, $\nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t$, dan $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \partial \vec{D}/\partial t$, di mana $\vec{D} := \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}$, $\vec{P} := \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$, dan $\vec{M} := \mu_0 \chi_m \vec{H}$, serta $\rho, \vec{J} \mapsto (\vec{r}, t)$, dan $(\epsilon_0, \mu_0, \chi_e, \chi_m)$ konstan.

   Jawaban. Persamaan Maxwell adalah $\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} + \nabla \cdot \vec{P} = 0$, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, $\nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t$, dan $(1/\mu_0)(\nabla \times \vec{B} - \nabla \times \vec{M}) = \vec{J} + \epsilon_0 \partial \vec{E}/\partial t + \partial \vec{P}/\partial t$. Misalkan $\vec{P} = \vec{M} = \vec{0}$. Persamaan Maxwell menjadi $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, $\nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t$, dan $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + (1/c^2)\partial \vec{E}/\partial t$ mengingat $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$. Lalu, $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = (1/\epsilon_0)\nabla\rho - \nabla^2 \vec{E} = -(\partial/\partial t)(\mu_0 \vec{J} + (1/c^2)\partial \vec{E}/\partial t)$. Lalu, $\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = \vec{0} - \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \nabla \times \vec{J} + (1/c^2)(\partial/\partial t)(-\partial \vec{B}/\partial t)$. Apabila $\rho = 0$ dan $\vec{J} = \vec{0}$, maka $\nabla^2 \vec{E} = (1/c^2)\partial^2 \vec{E}/\partial t^2$ dan $\nabla^2 \vec{B} = (1/c^2)\partial^2 \vec{B}/\partial t^2$, yang penyelesaian khususnya adalah $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$ dan $\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$. ■

9.12 Paket L

1. Mengapa gelombang untuk partikel bebas pada waktu t di posisi $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ selalu memiliki bentuk $\Psi = A e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$ di mana $\vec{k}$ adalah vektor gelombang dan ω adalah frekuensi sudut getaran?

   Jawaban. Persamaan Schrödinger non-relativistik adalah

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \Psi + V\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \tag{9.143}$$

   Untuk partikel bebas, $V = 0$, sehingga

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \tag{9.144}$$

   Apabila $\Psi := \psi\tau$ di mana $\psi \mapsto \vec{r}$ dan $\tau \mapsto t$, maka

$$\frac{1}{\psi}\nabla^2 \psi = -i\frac{2m}{\hbar}\frac{1}{\tau}\frac{d\tau}{dt} = -k^2. \tag{9.145}$$

   $d\tau/dt = -i\omega\tau$ di mana $\omega := \hbar k^2/(2m)$, sehingga $\tau = \tau_0 e^{-i\omega t}$. Lalu, $\nabla^2 \psi = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2)\psi = k^2 \psi$. Jika $\psi := XYZ$, di mana $X \mapsto x$, $Y \mapsto y$, dan $Z \mapsto z$, serta $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$, maka $X = X_0 e^{ik_x x}$, $Y = Y_0 e^{ik_y y}$, dan $Z = Z_0 e^{ik_z z}$, sehingga $\Psi = XYZ\tau = A e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$ di mana $A := X_0 Y_0 Z_0 \tau_0$. ■

2. Mengapa pada potensial sumur tak hingga, fungsi gelombangnya tidak membutuhkan syarat kekontinyuan untuk turunan pertamanya?

3. Besaran waktu itu ditentukan oleh perilaku suatu benda yang akan dijadikan acuan waktu. Diketahui waktu untuk menghasilkan n_1 buah getaran teratur benda A adalah t_1, serta waktu untuk menghasilkan n_2 buah getaran teratur benda B adalah t_2. Jika waktu menurut A adalah t, maka tentukan waktu menurut B.

Jawaban. Lihat sesi 8.3. ■

4. Andaikan sebuah foton yang mula-mula memiliki panjang gelombang λ ditembakkan pada sebuah elektron yang bermassa diam m_0 yang mula-mula diam. Apabila panjang gelombang foton setelah menumbuk elektron adalah λ', dan sudut antara arah hambur foton dengan arah tembak foton mula-mula adalah ϕ, maka buktikan bahwa

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\phi) \tag{9.146}$$

di mana h adalah tetapan Planck, dan c adalah kelajuan cahaya dalam ruang hampa.

Jawaban. Lihat jawaban nomor 20 pada sesi 9.1. ■

5. Selesaikan persamaan gerak getaran selaras teredam, yaitu

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0, \tag{9.147}$$

yaitu mencari $x \mapsto t$, di mana $\dot{x} := dx/dt$, $\ddot{x} := d\dot{x}/dt$, $m, c, k \in \mathbb{R}^+$.

Jawaban. Lihat jawaban nomor 8 pada sesi 9.3. ■

9.13 Paket M

1. Diketahui seperangkat vektor

$$A := \{\vec{a}_j := (a_{j1}, \cdots, a_{jn}) \in \mathbb{R}^n \mid j \in \{1, \cdots, n\}\} \tag{9.148}$$

di mana $a_{jk} \in \mathbb{R}$ untuk setiap $k \in \{1, \cdots, n\}$. Tentukan syarat agar A bebas linier.

Jawaban. Lihat jawaban nomor 10 pada sesi 9.2. ■

2. Diketahui seperangkat fungsi

$$B := \{f_j \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid j \in \{1, \cdots, n\}\}. \tag{9.149}$$

Tentukan syarat agar B bebas linier.

Jawaban. $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j(x) = 0$ menghendaki $\alpha_j = 0$ untuk semua $j \in \{1, \cdots, n\}$ sebagai satu-satunya kemungkinan. Turunan ke-k untuk kedua ruas persamaan tersebut adalah $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j^{(k)}(x) = 0$ untuk setiap $k \in \{1, \cdots, n-1\}$ di mana

$$f^{(k)}(x) := (d^k/dx^k)f(x). \tag{9.150}$$

Penyajian matriksnya adalah

$$\begin{pmatrix} f_1^{(0)}(x) & \cdots & f_n^{(0)}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{9.151}$$

Karena $\alpha_j = 0$ untuk setiap $j \in \{1, \cdots, n\}$, maka

$$\begin{vmatrix} f_1^{(0)}(x) & \cdots & f_n^{(0)}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{9.152}$$

Determinan pada persamaan (9.152) dikenal sebagai *Wronskian*. ■

3. Buktikan bahwa swa-nilai dari matriks $M \in \mathrm{ML}(2, \mathbb{R})$ adalah M_+ dan M_- sedemikian rupa sehingga

$$M_\pm := \frac{1}{2}\left(\mathrm{Tr}\, M \pm \sqrt{(\mathrm{Tr}\, M)^2 - 4 \det M}\right). \tag{9.153}$$

Jawaban. Lihat jawaban nomor 13 pada sesi 9.2. ■

4. Andaikan $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D} \in \mathbb{R}^3$ adalah empat buah vektor fisis. Buktikan identitas vektor

$$[\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}]\vec{D} = (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \times \vec{C}) + (\vec{B} \cdot \vec{D})(\vec{C} \times \vec{A}) + (\vec{C} \cdot \vec{D})(\vec{A} \times \vec{B}) \tag{9.154}$$

dengan menggunakan aljabar dan analisis vektor.

Jawaban. Lihat sesi 7.22. ■

5. Andaikan $\vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{R}^3$ adalah dua buah vektor fisis. Buktikan identitas vektor

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} \tag{9.155}$$

dan

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + (\nabla \cdot \vec{B})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} - (\nabla \cdot \vec{A})\vec{B} \tag{9.156}$$

dengan menggunakan kalkulus dan analisis vektor.

Jawaban. Lihat jawaban nomor 19 dan 20 pada sesi 9.2. ■

6. Andaikan $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ adalah vektor posisi, dan $\delta^{(3)} : \mathbb{R}^3 \to \bar{\mathbb{R}}$ adalah delta Dirac 3-dimensi. Buktikan bahwa $\nabla^2(1/|\vec{r}|) = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r})$ dengan menggunakan teorema Stokes.

Jawaban. Lihat sesi 7.31. ■

7. Andaikan $A \subset \mathbb{R}^3$ adalah sebuah luasan sederhana, $V \subseteq \mathbb{R}^3$ adalah sebuah volume, $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$ adalah sebuah peubah vektor, $\varphi \in \mathbb{R}$ adalah sebuah peubah skalar, serta $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ adalah vektor posisi. Buktikan teorema Stokes
$$\oint_{\partial A} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_A (\nabla \times \vec{A}) \cdot d^2\vec{r}, \tag{9.157}$$
$$\oint_{\partial A} \varphi\, d\vec{r} = -\int_A \nabla\varphi \times d^2\vec{r}, \tag{9.158}$$
$$\oint_{\partial V} \vec{A} \cdot d^2\vec{r} = \int_V \nabla \cdot \vec{A}\, d^3\vec{r}, \tag{9.159}$$
$$\oint_{\partial V} \varphi\, d^2\vec{r} = \int_V \nabla\varphi\, d^3\vec{r}, \tag{9.160}$$
dan
$$\oint_{\partial V} \vec{A} \times d^2\vec{r} = -\int_V \nabla \times \vec{A}\, d^3\vec{r}. \tag{9.161}$$

Jawaban. Lihat jawaban nomor 5 sampai 10 pada sesi 9.4. ■

8. Andaikan $T := \{\vec{e}_\mu \mid \mu \in \{1, \cdots, n\}\}$ adalah basis vektor kontravarian, $V := \{\vec{e}^\mu \mid \mu \in \{1, \cdots, n\}\}$ adalah basis vektor kovarian, $q^1, \cdots, q^n$ adalah n buah koordinat umum, serta Γ adalah lambang Christoffel. Buktikan bahwa
$$\frac{\partial \vec{e}_\mu}{\partial q^\nu} = \sum_{\lambda=1}^{n} \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \vec{e}_\lambda \tag{9.162}$$
dan
$$\frac{\partial \vec{e}^\mu}{\partial q^\nu} = -\sum_{\lambda=1}^{n} \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} \vec{e}^\lambda. \tag{9.163}$$

Jawaban. Lihat jawaban nomor 12 dan 13 pada sesi 9.4. ■

9. Andaikan $\vec{a} := \sum_{j=1}^n a_j \hat{x}_j, \vec{b} := \sum_{j=1}^n b_j \hat{x}_j \in \mathbb{R}^n$ adalah dua buah vektor, serta $\{\hat{x}_j \in \mathbb{R}^n \mid j \in \{1, \cdots, n\}\}$ adalah basis ortonormal. Dengan menggunakan aljabar geometris, buktikan bahwa
$$\hat{x}_j \hat{x}_k = 2\delta_{jk} - \hat{x}_k \hat{x}_j \quad \text{dan} \quad \vec{a} \wedge \vec{b} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_j b_k \hat{x}_j \hat{x}_k - a_j b_j \right). \tag{9.164}$$

Jawaban. $\vec{a}\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\wedge\vec{b}$ sehingga $\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{a})$ dan $\vec{a}\wedge\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{a})$. Karena $2\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{a}$, maka $\hat{x}_j\hat{x}_k + \hat{x}_k\hat{x}_j = 2\delta_{jk}$. Karena $\vec{a}\wedge\vec{b} = \vec{a}\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{b}$, maka
$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge \vec{b} &= \sum_{j,k=1}^{n} a_j b_k \hat{x}_j \wedge \hat{x}_k = \sum_{j,k=1}^{n} a_j b_k (\hat{x}_j \hat{x}_k - \delta_{jk}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_j b_k \hat{x}_j \hat{x}_k - a_j b_j \right). \end{aligned} \tag{9.165}$$
■

10. Diketahui $\vec{A} := A_0 + A_1\hat{x}_1 + A_2\hat{x}_2 + A_{12}\hat{x}_1\hat{x}_2$ dan $\vec{B} := B_0 + B_1\hat{x}_1 + B_2\hat{x}_2 + B_{12}\hat{x}_1\hat{x}_2$ adalah dua buah multi-vektor, di mana $A_0, A_1, A_2, A_{12}, B_0, B_1, B_2, B_{12} \in \mathbb{R}$, serta $\{\hat{x}_1, \hat{x}_2\}$ adalah basis ortonormal. Dengan menggunakan aljabar geometris, hitunglah perkalian geometris antara kedua multi-vektor tersebut, yaitu $\vec{A}\vec{B}$.

Jawaban.

$$\begin{aligned}\vec{A}\vec{B} &= (A_0 + A_1\hat{x}_1 + A_2\hat{x}_2 + A_{12}\hat{x}_1\hat{x}_2)(B_0 + B_1\hat{x}_1 + B_2\hat{x}_2 + B_{12}\hat{x}_1\hat{x}_2) \\ &= (A_0B_0 + A_1B_1 + A_2B_2 - A_{12}B_{12}) + (A_0B_1 + A_1B_0 + A_{12}B_2 - A_2B_{12})\hat{x}_1 \\ &\quad + (A_0B_2 + A_2B_0 + A_1B_{12} - A_{12}B_1)\hat{x}_2 \\ &\quad + (A_0B_{12} + A_{12}B_0 + A_1B_2 - A_2B_1)\hat{x}_1\hat{x}_2. \end{aligned} \tag{9.166}$$

■

9.14 Paket N

1. Mengapa aliran elektron dapat terkendala menelusuri kawat yang ujung-ujungnya diberi beda potensial?

Jawaban. Ini karena terdapat perbedaan potensial listrik yang gradatif dalam ruang sedemikian terdapat jurang potensial yang berbentuk seperti saluran selokan potensial yang bentuknya sama dengan bentuk kawat tersebut. ■

2. Apakah medan listrik di titik di dalam distribusi muatan yang berbentuk permukaan tertutup sederhana itu nol? Buktikan dengan analisis vektor.

Jawaban.

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\partial V} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} |d^2\vec{r}'|. \tag{9.167}$$

Apabila $\vec{r} \in V$, maka belum tentu $\vec{E} = \vec{0}$. ■

3. Andaikan resistor R, induktor L, dan kapasitor C dirangkai seri pada suatu kawat penghantar yang dihubungkan dengan tegangan listrik konstan V_0. Tentukan arus listrik I yang dihasilkan yang bergantung pada waktu t.

Jawaban.

$$RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\left(Q_0 + \int_0^t I\, dt\right) = V_0. \tag{9.168}$$

$$Q = Q_0 + \int_0^t I\, dt. \tag{9.169}$$

$$R\frac{dQ}{dt} + L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{C}Q = V_0. \tag{9.170}$$

$Q = Q_p + Q_c$ di mana $Q_p = V_0 C$.

$$R\frac{dQ_c}{dt} + L\frac{d^2Q_c}{dt^2} + \frac{1}{C}Q_c = 0. \tag{9.171}$$

$Q_c = C_+ e^{\alpha_+ t} + C_- e^{\alpha_- t}$ di mana $\alpha_\pm := (-R \pm \sqrt{R^2 - 4L/C})/(2L)$ sehingga $Q = V_0 C + C_+ e^{\alpha_+ t} + C_- e^{\alpha_- t}$ lalu $I = dQ/dt = \alpha_+ C_+ e^{\alpha_+ t} + \alpha_- C_- e^{\alpha_- t}$ alias

$$I = \frac{((\dot{I})_0 - \alpha_- I_0)e^{\alpha_+ t} + (\alpha_+ I_0 - (\dot{I})_0)e^{\alpha_- t}}{\alpha_+ - \alpha_-}. \tag{9.172}$$

■

4. Buktikan bahwa gaya yang dialami oleh sebuah partikel klasik bermassa rehat m_0 pada waktu t adalah

$$\vec{F} = m_{//}\vec{a}_{//} + m_\perp \vec{a}_\perp \tag{9.173}$$

di mana $m_{//} := m_0\gamma^3$ adalah massa longitudinal, $m_\perp := m_0\gamma$ adalah massa transversal, $\gamma := (1-(v/c)^2)^{-1/2}$ adalah faktor Lorentz, $v := |\vec{v}|$, $\vec{v}$ adalah kecepatan partikel, $\vec{a}_{//} := (\vec{a}\cdot\hat{v})\hat{v}$, $\vec{a}_\perp := \vec{a} - \vec{a}_{//}$, $\vec{a} := d\vec{v}/dt$, dan $\hat{v} := \vec{v}/v$.

Jawaban. Lihat persamaan (4.12). ■

5. Tentukan transformasi Lorentz untuk perangkat ruang-waktu, momentum-tenaga, momentum-massa, dan swa-kecepatan-faktor-Lorentz.

Jawaban. Lihat sesi 4.2. ■

6. Buktikan bahwa medan listrik relativistik pada posisi $\vec{r}$ akibat sebuah partikel klasik bermuatan q' yang terletak pada posisi $\vec{r}'$ pada waktu t adalah

$$\vec{E} = \frac{\kappa q'(1-\beta^2)\vec{R}/R^3}{(1-\beta^2\sin^2\psi)^{3/2}} \tag{9.174}$$

di mana $\beta := v'/c$, $v' := |\vec{v}'|$, $\vec{v}' := d\vec{r}'/dt$, ψ sedemikian $\sin\psi = R_\perp/R$, $R_\perp := |\vec{R}_\perp|$, $R := |\vec{R}|$, $\vec{R}_\perp := \vec{R} - \vec{R}_{//}$, $\vec{R}_{//} := (\vec{R}\cdot\hat{v}')\hat{v}'$, $\hat{v}' := \vec{v}'/|\vec{v}'|$, dan $\vec{R} := \vec{r} - \vec{r}'$.

Jawaban. Andaikan ada muatan q yang terletak di posisi $\vec{r}$ menurut pusat koordinat O, serta n buah muatan $q_1, \cdots, q_n$ yang berturut-turut terletak di posisi $\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_n$ menurut pusat koordinat O pula. Semua muatan tersebut bergerak dengan kecepatan $\vec{v}$ yang sama menurut O. Gaya yang dialami muatan q menurut semua muatan tersebut adalah

$$\vec{F}^0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j\vec{R}_j^0}{(R_j^0)^3} \tag{9.175}$$

di mana $\vec{R}_j^0 := \vec{r}^0 - \vec{r}_j^0$, $\vec{R}_{j//}^0 := \vec{R}_j^0 \cdot \hat{v}\hat{v}$, dan $\vec{R}_{j\perp}^0 := \vec{R}_j^0 - \vec{R}_{j//}^0$, serta $\vec{R}_j := \vec{r} - \vec{r}_j s$. Telah diketahui bahwa $\vec{R}_{j//}^0 = \gamma\vec{R}_{j//}$ dan $\vec{R}_{j\perp}^0 = \vec{R}_{j\perp}$ di mana $\gamma :=$

$(1-(v/c)^2)^{-1/2}$. Transformasi Lorentz untuk momentum linier dengan parameter $\vec{V}$ adalah

$$\vec{p}' = \vec{p} + (\Gamma-1)\vec{p}\cdot\hat{V}\hat{V} - \Gamma\mathcal{E}\vec{V}/c^2 \tag{9.176}$$

sehingga transformasi Lorentz untuk gaya adalah

$$\vec{F}' := \frac{d\vec{p}'}{dt'} = \frac{\vec{F} + (\Gamma-1)\vec{F}\cdot\hat{V}\hat{V} - \Gamma\vec{F}\cdot\vec{v}\vec{V}/c^2}{\Gamma(1-\vec{v}\cdot\vec{V}/c^2)}. \tag{9.177}$$

Menurut semua muatan tadi, berlakulah

$$\begin{aligned} \vec{F}^0 &= \frac{\vec{F} + (\gamma-1)\vec{F}\cdot\hat{v}\hat{v} - \gamma\vec{F}\cdot\vec{v}\vec{v}/c^2}{\gamma(1-(v/c)^2)} \\ &= \gamma(\vec{F} + (\gamma-1)\vec{F}\cdot\hat{v}\hat{v} - \gamma\vec{F}\cdot\vec{v}\vec{v}/c^2). \end{aligned} \tag{9.178}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}^0_{//} &= \gamma(\vec{F}_{//} + (\gamma-1)\vec{F}_{//} - \gamma\vec{F}_{//}v^2/c^2) \\ &= \gamma^2(1-v^2/c^2)\vec{F}_{//} = \vec{F}_{//}. \end{aligned} \tag{9.179}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}^0_{\perp} &= \vec{F}^0 - \vec{F}^0_{//} \\ &= \gamma(\vec{F} + (\gamma-1)\vec{F}_{//} - \gamma\vec{F}_{//}v^2/c^2) - \vec{F}_{//} \\ &= \gamma(\vec{F}_{\perp} + \gamma\vec{F}_{//}(1-v^2/c^2)) - \vec{F}_{//} \\ &= \gamma(\vec{F}_{\perp} + (1/\gamma)\vec{F}_{//}) - \vec{F}_{//} = \gamma\vec{F}_{\perp}. \end{aligned} \tag{9.180}$$

Dengan mendefinisikan $\beta := v/c$ dan $\sin\psi_j := R_{j\perp}/R_j$, maka

$$\begin{aligned} \vec{F}_{//} &= \vec{F}^0_{//} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j\vec{R}^0_{j//}}{((R^0_{j//})^2 + (R^0_{j\perp})^2)^{3/2}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j\gamma\vec{R}_{j//}}{(\gamma^2R^2_{j//} + R^2_{j\perp})^{3/2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j\gamma^{-2}\vec{R}_{j//}}{(R^2_{j//} + (1-\beta^2)R^2_{j\perp})^{3/2}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j\gamma^{-2}\vec{R}_{j//}}{R^3_j(1-\beta^2\sin^2\psi_j)^{3/2}}. \end{aligned} \tag{9.181}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\perp} &= \frac{\vec{F}^0_{\perp}}{\gamma} = \frac{1}{\gamma}(\vec{F}^0 - \vec{F}^0_{//}) = \frac{1}{\gamma}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j\vec{R}^0_{j\perp}}{((R^0_{j//})^2 + (R^0_{j\perp})^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{\gamma}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j\vec{R}_{j\perp}}{(\gamma^2R^2_{j//} + R^2_{j\perp})^{3/2}} = \frac{1}{\gamma}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j\gamma^{-3}\vec{R}_{j\perp}}{(R^2_{j//} + (1-\beta^2)R^2_{j\perp})^{3/2}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j\gamma^{-2}(1-\beta^2)\vec{R}_{j\perp}}{R^3_j(1-\beta^2\sin^2\psi_j)^{3/2}}. \end{aligned} \tag{9.182}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_{//} + \vec{F}_{\perp} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) \tag{9.183}$$

merupakan gaya Lorentz relativistik, di mana

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j\gamma^{-2}\vec{R}_j}{R_j^3(1-\beta^2\sin^2\psi_j)^{3/2}} \tag{9.184}$$

adalah medan listrik relativistik, serta

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j\gamma^{-2}\vec{v}\times\vec{R}_j}{R_j^3(1-\beta^2\sin^2\psi_j)^{3/2}} \tag{9.185}$$

adalah medan magnet relativistik, dengan $\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$. ■

9.15 Paket O

1. Buktikan bahwa perkalian silang antara dua buah vektor itu menghasilkan pseudo-vektor.

   Jawaban.

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})' &= (\epsilon_{jkl}\hat{x}_j a_k b_l)' = \epsilon_{jkl}\hat{x}_j' a_k' b_l' = \epsilon_{jkl}R_{jm}R_{kn}R_{lp}\hat{x}_m a_n b_p \\ &= (\det R)\epsilon_{mnp}\hat{x}_m a_n b_p = (\det R)(\vec{a}\times\vec{b}).\end{aligned} \tag{9.186}$$

■

2. Buktikan bahwa perkalian titik vektor dengan pseudo-vektor itu menghasilkan pseudo-skalar.

   Jawaban. Andaikan $\vec{a}$ adalah vektor, dan $\vec{b}$ adalah pseudo-vektor.

$$\begin{aligned}(\vec{a}\cdot\vec{b})' &= (a_j b_j)' = a_j' b_j' = (\det R)R_{jk}R_{jl}a_k b_l = (\det R)\delta_{kl}a_k b_l \\ &= (\det R)a_k b_k = (\det R)(\vec{a}\cdot\vec{b}).\end{aligned} \tag{9.187}$$

■

3. Andaikan di ruang $\mathbb{R}^3$ hanya ada dua buah partikel tak bermassa yang bermuatan $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ yang berturut-turut terletak pada posisi $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \in \mathbb{R}^3$ pada waktu $t \in \mathbb{R}$. Tentukan persamaan gerak kedua partikel tersebut menurut interaksi gravitasi dan elektromagnetis.

   Jawaban. Lihat sesi 5.1. ■

4. Buktikan semua kasus khusus dari teorema Stokes umum, yaitu $\oint_{\partial\Omega}\omega = \int_\Omega d\omega$, di mana Ω adalah manifold di ruang $\mathbb{R}^3$, dan ω adalah forma diferensial.

   Jawaban. Lihat jawaban nomor 5 sampai 10 pada sesi 9.4. ■

5. Andaikan q^1, q^2, q^3 adalah tiga buah koordinat umum, serta $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ adalah vektor posisi, serta $\vec{e}_j := \partial\vec{r}/\partial q^j$ dan $\vec{e}^j := \nabla q^j$ untuk semua $j \in \{1,2,3\}$. Apabila $\vec{e}_j \times \vec{e}_k = \sum_{s=1}^{3} \epsilon'_{jks}\vec{e}^s$, maka buktikan bahwa apabila $\vec{r} := (x_1, x_2, x_3)$, maka berlakulah kaitan

$$\epsilon'_{jks} = \sum_{l,m,r=1}^{3} \epsilon_{lmr} \frac{\partial x_l}{\partial q^j} \frac{\partial x_m}{\partial q^k} \frac{\partial x_r}{\partial q^s} \tag{9.188}$$

di mana ϵ_{lmr} adalah epsilon Levi-Civita.

Jawaban.

$$\begin{aligned}\vec{e}_j \times \vec{e}_k &= \frac{\partial x_l}{\partial q^j}\frac{\partial x_m}{\partial q^k}\hat{x}_l \times \hat{x}_m = \frac{\partial x_l}{\partial q^j}\frac{\partial x_m}{\partial q^k}\epsilon_{lmr}\hat{x}_r \\ &= \frac{\partial x_l}{\partial q^j}\frac{\partial x_m}{\partial q^k}\epsilon_{lmr}\frac{\partial x_r}{\partial q^s}\vec{e}^s = \epsilon'_{jks}\vec{e}^s \end{aligned} \tag{9.189}$$

sehingga

$$\epsilon'_{jks} = \epsilon_{lmr}\frac{\partial x_l}{\partial q^j}\frac{\partial x_m}{\partial q^k}\frac{\partial x_r}{\partial q^s}. \tag{9.190}$$

■

6. Andaikan di ruang $\mathbb{R}^3$ ada n buah partikel bermassa $m_1, \cdots, m_n \in \mathbb{R}$ yang berturut-turut bermuatan $q_1, \cdots, q_n \in \mathbb{R}$ yang berturut-turut terletak pada posisi $\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_n \in \mathbb{R}^3$ pada waktu $t \in \mathbb{R}$. Tentukan persamaan gerak masing-masing dari n buah partikel tersebut.

Jawaban. Andaikan $\mathbb{N}_n := \{1, \cdots, n\}$.

$$\begin{aligned} m_j\ddot{\vec{r}}_j &= G\sum_{k\in\mathbb{N}_n-\{j\}} \frac{m_j m_k}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|^3}(\vec{r}_k - \vec{r}_j) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{k\in\mathbb{N}_n-\{j\}}\frac{q_j q_k}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|^3}(\vec{r}_j - \vec{r}_k) \\ &\quad + \frac{\mu_0}{4\pi}q_j\dot{\vec{r}}_j \times \sum_{k\in\mathbb{N}_n-\{j\}}\frac{q_k\dot{\vec{r}}_k \times (\vec{r}_j - \vec{r}_k)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|^3}. \end{aligned} \tag{9.191}$$

■

9.16 Paket P

1. Selesaikan persamaan Bernoulli $y' + Py = Q$ dan $y' + Py = Qy^n$ untuk $y \mapsto x$, di mana $y, P, Q, x, n \in \mathbb{R}$, serta $y, P, Q \mapsto x$, dengan n adalah sebuah tetapan.

Jawaban. Lihat sesi 7.35. ■

2. Selesaikan persamaan diferensial $ay'' + by' + cy = 0$, di mana $a, b, c, y \in \mathbb{C}$, $y \mapsto x$, $y' := dy/dx$, dan $y'' := dy'/dx$, di mana a, b, c adalah tetapan.

Jawaban. Lihat sesi 7.36. ■

3. Selesaikan persamaan diferensial $ay''' + by'' + cy' + dy = 0$, di mana $a, b, c, d, y \in \mathbb{C}$, $y \mapsto x$, $y' := dy/dx$, $y'' := dy'/dx$, dan $y''' := dy''/dx$, di mana a, b, c, d adalah tetapan.

   Jawaban. Misalkan persamaan diferensial tersebut difaktorkan menjadi

   $$(d/dx - \alpha)(d/dx - \beta)(d/dx - \gamma)y = 0, \tag{9.192}$$

   maka apabila $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$, maka penyelesaiannya adalah $y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} + Ce^{\gamma x}$ di mana A, B, C adalah tetapan sebarang. Apabila $\gamma = \beta$ dan $\alpha \neq \beta$, maka penyelesaiannya adalah $y = Ae^{\alpha x} + (Bx + C)e^{\beta x}$ di mana A, B, C adalah tetapan sebarang. Apabila $\alpha = \beta = \gamma$, maka penyelesaiannya adalah $y = (Ax^2 + Bx + C)e^{\alpha x}$ di mana A, B, C adalah tetapan sebarang. ■

4. Selesaikan persamaan kubik $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ untuk $x \mapsto (a, b, c, d)$, di mana $a, b, c, d, x \in \mathbb{C}$.

   Jawaban. $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ dengan $a \neq 0$.

   Apabila $x := y - h$, maka $y = x + h$ dan $py^3 + qy + r = 0$.

   $p(x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3) + q(x + h) + r = 0$.

   $a = p$, $b = 3hp$, $c = 3h^2p + q$, dan $d = h^3p + hq + r$.

   $h = b/(3a)$, $q = c - 3ah^2$, dan $r = d - hq - h^3p = d - (b/3a)(c - 2b^2/9a)$.

   Apabila $y = u + v$, maka $p(u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3) + q(u + v) + r = 0$.

   $a(u^3 + 3uv(u + v) + v^3) + q(u + v) + r = 0$.

   $(a(u^3 + v^3) + r) + (u + v)(3auv + q) = 0$.

   $a(u^3 + v^3) + r = 0$ dan $3auv + q = 0$.

   Karena $v = -q/(3au)$, maka $a(u^3 - q^3/27a^3u^3) + r = 0$.

   $a(u^3)^2 + ru^3 - q^3/(27a^2) = 0$.

   $27a^3(u^3)^2 + 27a^2ru^3 - q^3 = 0$.

   $u^3 = (1/54a^3)(-27a^2r \pm \sqrt{(27a^2r)^2 + 4(27)a^3q^3})$.

   $u^3 = (1/2)(-r/a \pm \sqrt{(r/a)^2 + (4/27)(q/a)^3})$.

   $v = -q/(3au) = -(q/3a)(u^3)^{-1/3}$.

   $y = u + v = (u^3)^{1/3} - (q/3a)(u^3)^{-1/3} = x + h = x + b/(3a)$.

   $x = (u^3)^{1/3} - (1/3a)(q(u^3)^{-1/3} + b)$. ■

5. Andaikan $x, y, M, N \in \mathbb{R}$, $y \mapsto x$, dan $M, N \mapsto (x, y)$, serta $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$. Tentukan penyelesaian dari persamaan diferensial $M\,dx + N\,dy = 0$, yaitu mencari $y \mapsto x$.

   Jawaban. Lihat sesi 7.37. ■

6. Andaikan $x, y, M, N, u \in \mathbb{R}$, $u, y \mapsto x$, dan $M, N \mapsto (x, y)$, serta $\partial(uM)/\partial y = \partial(uN)/\partial x$. Tentukan penyelesaian dari persamaan diferensial $M\,dx + N\,dy = 0$, yaitu mencari $y \mapsto x$.

   Jawaban. Lihat sesi 7.38. ■

9.17 Paket Q

1. Andaikan ada dua buah partikel klasik non-relativistik yang bermuatan $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ yang berturut-turut terletak pada posisi $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \in \mathbb{R}^3$. Tentukan posisi di ruang $\mathbb{R}^3$ di mana medan listriknya nol.

   Jawaban. Lihat sesi 5.2. ■

2. Tentukan medan listrik di titik $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ yang dihasilkan oleh muatan listrik yang memiliki distribusi garis lurus $L := \{z\hat{z} \mid z \in \mathbb{R}\}$ dengan rapat muatan kurva $\lambda \in \mathbb{R}$ yang konstan, di mana $\hat{z} := (0, 0, 1)$.

   Jawaban. Andaikan $V := \{\vec{r}' \in \mathbb{R}^3 \mid (\vec{r}' \cdot \hat{x})^2 + (\vec{r}' \cdot \hat{y})^2 \leq (\vec{r} \cdot \hat{x})^2 + (\vec{r} \cdot \hat{y})^2, -l/2 \leq \vec{r}' \cdot \hat{z} \leq l/2\}$. Menurut hukum Gauss, diperoleh

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d^2\vec{r} = El2\pi\sqrt{(\vec{r} \cdot \hat{x})^2 + (\vec{r} \cdot \hat{y})^2} = \frac{1}{\epsilon_0}\lambda l. \tag{9.193}$$

$$\vec{E} = E\frac{(\vec{r} \cdot \hat{x})\hat{x} + (\vec{r} \cdot \hat{y})\hat{y}}{\sqrt{(\vec{r} \cdot \hat{x})^2 + (\vec{r} \cdot \hat{y})^2}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{(\vec{r} \cdot \hat{x})\hat{x} + (\vec{r} \cdot \hat{y})\hat{y}}{(\vec{r} \cdot \hat{x})^2 + (\vec{r} \cdot \hat{y})^2} \tag{9.194}$$

   di mana $\hat{x} := (1, 0, 0)$ dan $\hat{y} := (0, 1, 0)$. ■

3. Tentukan medan listrik di titik $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ yang dihasilkan oleh muatan listrik yang memiliki distribusi bidang datar $P := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{r} \cdot \hat{z} = 0\}$ dengan rapat muatan permukaan $\sigma \in \mathbb{R}$ yang konstan, di mana $\hat{z} := (0, 0, 1)$.

   Jawaban. Andaikan $V := \{\vec{r}' \in \mathbb{R}^3 \mid (\vec{r}' \cdot \hat{x})^2 + (\vec{r}' \cdot \hat{y})^2 \leq R^2, -h \leq \vec{r}' \cdot \hat{z} \leq h\}$. Menurut hukum Gauss, diperoleh

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d^2\vec{r} = 2E\pi R^2 = \frac{1}{\epsilon_0}\sigma\pi R^2 \tag{9.195}$$

   sehingga $E = \sigma/(2\epsilon_0)$.

$$\vec{E} = E\hat{z}\frac{\vec{r} \cdot \hat{z}}{|\vec{r} \cdot \hat{z}|} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{\vec{r} \cdot \hat{z}}{|\vec{r} \cdot \hat{z}|}\hat{z} \tag{9.196}$$

   di mana $\hat{x} := (1, 0, 0)$ dan $\hat{y} := (0, 1, 0)$. ■

4. Tentukan medan listrik di titik $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ yang dihasilkan oleh muatan listrik yang memiliki distribusi bola pejal $D^3 := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid |\vec{r}| \leq R\}$ dengan rapat muatan volume $\rho \in \mathbb{R}$ yang konstan, di mana $R \in \mathbb{R}^+$ adalah jari-jari bola tersebut.

Jawaban. Andaikan $V := \{\vec{r}' \in \mathbb{R}^3 \mid |\vec{r}'| \leq |\vec{r}|\}$. Untuk $|\vec{r}| \leq R$, maka

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d^2\vec{r} = E4\pi|\vec{r}|^2 = \frac{1}{\epsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi|\vec{r}|^3 \tag{9.197}$$

sehingga $E = \rho|\vec{r}|/(3\epsilon_0)$. Lantas, $\vec{E} = E\vec{r}/|\vec{r}| = \rho\vec{r}/(3\epsilon_0)$.

Untuk $|\vec{r}| \geq R$, maka

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d^2\vec{r} = E4\pi|\vec{r}|^2 = \frac{1}{\epsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi R^3 \tag{9.198}$$

sehingga $E = \rho R^3/(3\epsilon_0|\vec{r}|^2)$. Lantas, $\vec{E} = E\vec{r}/|\vec{r}| = \rho R^3\vec{r}/|\vec{r}|^3$.

Jadi, secara keseluruhan, diperoleh

$$\vec{E} = \frac{\rho\vec{r}}{3\epsilon_0}\left(u(R - |\vec{r}|) + \frac{R^3}{|\vec{r}|^3}u(|\vec{r}| - R)\right) \tag{9.199}$$

di mana u adalah fungsi undak satuan Heaviside. ■

5. Tentukan medan magnet di titik $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ yang dihasilkan oleh garis lurus $L := \{z\hat{z} \mid z \in \mathbb{R}\}$ dengan arus listrik $I \in \mathbb{R}$ konstan yang mengalir naiknya nilai z di mana $\hat{z} := (0, 0, 1)$.

Jawaban. Andaikan $A := \{\vec{r}' \in \mathbb{R}^3 \mid (\vec{r}'\cdot\hat{x})^2 + (\vec{r}'\cdot\hat{y})^2 \leq (\vec{r}\cdot\hat{x})^2 + (\vec{r}\cdot\hat{y})^2, \vec{r}'\cdot\hat{z} = 0\}$. Menurut hukum Ampere, diperoleh

$$\oint_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{r} = B2\pi\sqrt{(\vec{r}\cdot\hat{x})^2 + (\vec{r}\cdot\hat{y})^2} = \mu_0 I \tag{9.200}$$

sehingga $B = \mu_0 I/(2\pi\sqrt{(\vec{r}\cdot\hat{x})^2 + (\vec{r}\cdot\hat{y})^2})$. Lantas,

$$\vec{B} = B\frac{-(\vec{r}\cdot\hat{y})\hat{x} + (\vec{r}\cdot\hat{x})\hat{y}}{\sqrt{(\vec{r}\cdot\hat{x})^2 + (\vec{r}\cdot\hat{y})^2}} = \frac{\mu_0 I[(\vec{r}\cdot\hat{x})\hat{y} - (\vec{r}\cdot\hat{y})\hat{x}]}{2\pi[(\vec{r}\cdot\hat{x})^2 + (\vec{r}\cdot\hat{y})^2]}. \tag{9.201}$$

■

6. Buktikan dari hukum Biot-Savart bahwa medan magnet yang dihasilkan oleh distribusi muatan berbentuk permukaan $S(f) := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{r}) = 0\}$ yang memiliki rapat arus $\vec{K} \in \mathbb{R}^3$ per satuan panjang, di mana $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ merupakan sebuah pemetaan, adalah

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\vec{r}\in S(f)} \frac{\vec{K} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}|d^2\vec{r}'|. \tag{9.202}$$

Jawaban. Hukum Biot-Savart adalah

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_D \frac{dq'\vec{v}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \tag{9.203}$$

$dq' = \sigma'|d^2\vec{r}'|$ dan $\vec{K} = \sigma'\vec{v}'$ sehingga $dq'\vec{v}' = \vec{K}|d^2\vec{r}'|$. ■

7. Buktikan dari hukum Biot-Savart bahwa medan magnet yang dihasilkan oleh distribusi muatan berbentuk volume $V(f) := \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{r}) \leq 0\}$ yang memiliki rapat arus $\vec{J} \in \mathbb{R}^3$ per satuan luas, di mana $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ merupakan sebuah pemetaan, adalah
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\vec{r} \in V(f)} \frac{\vec{J} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} |d^3\vec{r}'|. \tag{9.204}$$

Jawaban. $dq' = \rho' |d^3\vec{r}'|$ dan $\vec{J} = \rho' \vec{v}'$ sehingga $dq'\vec{v}' = \vec{J}|d^3\vec{r}'|$. ■

9.18 Paket R

1. Buktikan bahwa nilai $I := \int_{t_1}^{t_2} L\, dt$, di mana $L \mapsto (q^1, \cdots, q^n, \dot{q}^1, \cdots, \dot{q}^n, t)$, di mana $q^\mu, \dot{q}^\mu, t \in \mathbb{R}$ serta $q^\mu \mapsto t$ dan $\dot{q}^\mu := dq^\mu/dt$ untuk setiap $\mu \in \{1, \cdots, n\}$, mencapai nilai stasioner apabila
$$\frac{\partial L}{\partial q^\mu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu} = 0 \tag{9.205}$$
sedemikian $(\delta q^\mu)_{t=t_1} = (\delta q^\mu)_{t=t_2} = 0$, di mana δ adalah notasi variasi, sedemikian $\delta t = 0$.

   Jawaban. Lihat sesi 3.2. ■

2. Andaikan $\Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi gamma. Buktikan bahwa $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ dan $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

   Jawaban. Lihat jawaban nomor 1 pada sesi 9.6. ■

3. Sebutkan lima bentuk fungsi beta yang Saudara ketahui.

   Jawaban. Lihat jawaban nomor 2 pada sesi 9.6. ■

4. Andaikan $\mathrm{B} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ adalah fungsi beta. Buktikan bahwa $\mathrm{B}(x, y) = \mathrm{B}(y, x) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$.

   Jawaban. Lihat jawaban nomor 2 pada sesi 9.6. ■

5. Andaikan $\mathrm{erf}, \mathrm{erfc} : \bar{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ dan $P : \bar{\mathbb{R}}^2 \to \mathbb{R}$ berturut-turut adalah fungsi ralat, fungsi ralat pelengkap, dan fungsi peluang. Buktikan bahwa $\mathrm{erf}(-x) = -\mathrm{erf}(x)$, $P(-\infty, x) = \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{erf}(x/\sqrt{2})\right)$, $P(a, c) = P(a, b) + P(b, c)$, $\mathrm{erfc}(x) = 1 - \mathrm{erf}(x)$, dan $\mathrm{erf}(\infty) = 1$.

   Jawaban. Lihat jawaban nomor 4 dan 5 pada sesi 9.6. ■

6. Andaikan $\mathrm{sn}, \mathrm{cn}, \mathrm{dn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi-fungsi eliptik. Buktikan bahwa $\frac{d}{du} \mathrm{sn}\, u = \mathrm{cn}\, u\, \mathrm{dn}\, u$, $\frac{d}{du} \mathrm{cn}\, u = -\mathrm{sn}\, u\, \mathrm{dn}\, u$, dan $\mathrm{dn}\, u = \sqrt{1 - k^2\, \mathrm{sn}^2\, u}$ untuk setiap $k \in \mathbb{R}$.

Jawaban. Lihat jawaban nomor 6 pada sesi 9.6. ■

7. Andaikan $\mathrm{gd} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah Gudermanian. Buktikan bahwa $\tan \mathrm{gd}\, w = \sinh w$, $\sin \mathrm{gd}\, w = \tanh w$, $\cos \mathrm{gd}\, w = \operatorname{sech} w$, $\cot \mathrm{gd}\, w = \operatorname{csch} w$, $\sec \mathrm{gd}\, w = \cosh w$, $\csc \mathrm{gd}\, w = \coth w$, $\frac{d}{dw} \mathrm{gd}\, w = \operatorname{sech} w$, dan $\mathrm{gd}\, w = 2n\pi - \pi/2 + 2 \arctan e^w$ untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$.

   Jawaban. Lihat jawaban nomor 7, 8, 9, 10 dan 11 pada sesi 9.6. ■

8. Andaikan $\alpha \in \{\mathrm{amp}, \mathrm{sn}, \mathrm{cn}, \mathrm{dn}\}$ dan α_l adalah nilai α ketika $k = l$. Buktikan bahwa $\mathrm{amp}_0 F(0, \phi) = F(0, \phi)$, $\mathrm{sn}_0 F(0, \phi) = \sin F(0, \phi)$, $\mathrm{cn}_0 F(0, \phi) = \cos F(0, \phi)$, $\mathrm{dn}_0 F(0, \phi) = 1$, serta $\mathrm{amp}_1 F(1, \phi) = \mathrm{gd}\, F(1, \phi)$, $\mathrm{sn}_1 F(1, \phi) = \tanh F(1, \phi)$, $\mathrm{cn}_1 F(1, \phi) = \operatorname{sech} F(1, \phi)$, dan $\mathrm{dn}_1 F(1, \phi) = \operatorname{sech} F(1, \phi)$.

   Jawaban. Lihat jawaban nomor 12, 13, 14, dan 15 pada sesi 9.6. ■

Bab 10

Kutipan-Kutipan Mengesan

1. "Aku ya ora isa sinau ki, nek kamare durung disapu." (Dodo Relantyo, 2000)
2. "Sinau kuwi penak nek radha ngelih sithik." (Pak Dul Pranoto, SMU6, 2000)
3. "Nek malah dadi rumit, kuwi dudu rumus jenenge." (Chocky H. S. , 2001)
4. "Kalau kalian terlampau sibuk belajar di hari menjelang saat beribadah, maka saya rasa persiapan ibadah kalian sangat kurang." (Pak Petrus, SMU6, 2001)
5. "Kalau kalian lupa rumus ketika mengerjakan soal ujian matematika, segera turunkan sendiri rumusnya dari rumus yang kalian ingat." (Bu Eni, SMU6, 2002)
6. "Slash wis tau ngomong ngene, 'Aku gelem konser ning Indonesia anggere Bali tak pek.', karo sisan ngece-ngece." (Dodo Relantyo, 2002)
7. "Mahasiswa itu harus berpikir global." (Panitia OSPEK, 2003)
8. "Gila. Di fisika, itung-itungannya melebihi matematika." (Mas Gerry, 2003)
9. "Kita jangan bergantung pada teorema L' Hôpital dalam menghitung limit bentuk tak tentu 0/0, karena tanpa itu pun, limit itu bisa dihitung. Sebelum saya menerangkan tentang turunan, teorema itu tidak boleh dipakai untuk mengerjakan soal ujian mid nanti." (Pak Supama, 2003, saat kuliah Kalkulus I)
10. "Ada seorang mantan tentor les privat saya dulu yang selalu memberikan murid-muridnya rumus-rumus praktis untuk mengerjakan soal-soal matematika. Beberapa tahun kemudian, dia menjadi mahasiswa saya. Ketika ujian, dia tidak bisa mengerjakan soal-soalnya, hingga dia mulai mencoba melihat jawaban teman sebelahnya. Saya sebagai pengawas ujian saat itu tidak menegurnya karena dia mantan tentor saya." (Pak Supama, 2003, saat kuliah Kalkulus I)
11. "Suatu ketika, ada seorang mahasiswi saya yang kuliah pakai rok mini sekali, sehingga duduknya sangat-sangat sopan sekali. Apa ya tahan ta, Mbak? Hingga akhirnya dia tidak bisa menahan duduknya yang sopan lagi. Tapi tidak ada reaksi kimia apa-apa dari saya." (Pak Supama, 2003, saat kuliah Kalkulus I)

12. "Coba kalian terapkan kalkulus di fisika. Cobalah kalian pegang bagian bawah sebuah ceret berisi air setelah dididihkan, tapi sebentar saja. Pasti tangan kalian tidak akan merasa panas." (Pak Supama, 2003, saat kuliah Kalkulus I)
13. "Matematika itu mudah, karena kita tidak perlu memikirkan analisis dimensi, tidak seperti fisika." (Prof. Muslim, 2003, almarhum, saat kuliah Fis. Das. I.)
14. "Kalian jangan bertele-tele dalam menjawab soal fisika. Dalam olimpiade fisika, jawaban dengan kata-kata yang bertele-tele tidak akan dibaca oleh tim penilai." (Prof. Muslim, 2003, almarhum, saat kuliah pagi, Fisika Dasar I)
15. "Seandainya ada suatu pameran otak manusia di suatu galeri, maka para pengunjung terheran-heran pada sebuah otak yang sudah berkerut. Setelah ditanyakan, ternyata, oh, itu otak Einstein, karena sering dipakai untuk berpikir." (Prof. Muslim, 2003, almarhum, saat kuliah pagi, Fisika Dasar I)
16. "Semua rumus fisika itu sederhana. Kalau Saudara merumuskan persamaan fisika, tetapi hasilnya tidak sederhana, maka berarti Saudara berada di jalan yang salah." (Prof. Muslim, 2004, almarhum, di Lab. Fisika Atom dan Inti)
17. "Saudara boleh saja melakukan abstraksi fisika memakai matematika. Tetapi Saudara jangan meremehkan eksperimen." (Prof. Muslim, 2004, almarhum)
18. "Transformasi Lorentz itu hanyalah matematika, bukan fisika. Perumusan fisika hendaknya yang bisa memberikan ramalan." (Prof. Muslim, 2004, almarhum)
19. "Saudara jangan khawatir. Semua rumus fisika itu bisa ditelusuri, tidak turun dari langit begitu saja." (Prof. Muslim, 2004, almarhum, di Lab. Atom Inti)
20. "Meskipun semua rumus fisika itu bisa ditelusuri, tapi Saudara harus hafal rumus-rumus itu. Sebab, kalau tidak hafal, maka Saudara akan kehabisan waktu ketika mengerjakan soal-soal ujian untuk menurunkan rumus-rumus itu, yang biasanya sangat panjang prosesnya." (Prof. Muslim, 2004, almarhum)
21. "Kalau Saudara membuat rumus matematika atau fisika, maka ujilah rumus tersebut untuk kasus khusus. Sebab, kalau rumus itu gagal untuk satu kasus khusus saja, maka rumus Anda gagal." (Prof. Muslim, 2004, almarhum)
22. "Ibu senang kalau kamu asyik." (Bu Zahara Muslim, 2004, di Lab. Atom Inti)
23. "Transformasi Lorentz, aku wis kemput." (Prof. Muslim, 2004, almarhum)
24. "Kalau sedang belajar fisika, jangan sambil makan. Sambil minum boleh." (Prof. Muslim, 2004, almarhum, saat kuliah Fisika Dasar II)
25. "Sebentar, Pak Muslim biar minum dulu." (Bu Zahara Muslim, 2004)
26. "Semua kajian di buku-buku buatan saya itu selalu saya tulis dulu di atas kertas sebelum diketik." (Prof. Muslim, 2004, almarhum)

27. "Kalau belajar, Pak Muslim harus menulis." (Bu Zahara Muslim, 2004)

28. "Pak Muslim tidak pernah menghafal rumus, tapi hafal sendiri." (Bu Zahara Muslim, 2004)

29. "Orang fisika itu rendah hati karena tidak mau menamai teorema buatannya dengan namanya sendiri. Nanti yang menamai teorema itu adalah orang lain." (Prof. Muslim, 2004, almarhum, saat kuliah Fisika Dasar II di MI-Lan UGM)

30. "Orang fisika itu males nulis, karena sering menyingkat-nyingkat notasi." (Prof. Muslim, 2004, almarhum, saat kuliah Fisika Dasar II di MI-Lan UGM)

31. "Nggak usah ikut organisasi mahasiswa. Sudah, belajar fisika saja." (Prof. Muslim, 2004, almarhum, saat kuliah Fisika Dasar II di MI-Lan UGM)

32. "Tidak hanya zat-zat kimia saja yang berubah akibat transformasi Lorentz. Bahkan bisa jadi, Anda yang tampak oleh saya sebagai anak baik-baik, kalau diamati oleh kerangka acuan lain yang bergerak dengan kecepatan tinggi, maka Anda akan teramati oleh kerangka acuan itu bukan sebagai anak baik-baik." (Prof. Muslim, 2004, almarhum, via telepon)

33. "Sulit kali kuliah kita, bah. Sampai pakai bilangan imajiner." (Tumpal, 2004)

34. "Pak Rinto itu sama aja dengan Pak Muslim." (Yustinus Sinaga, 2004)

35. "Kata Anda, soal ini dari dosen ITB? Hayo, siapa namanya? Saya kenal, lho, sama dosen ITB." (Pak Mirza, 2004, di ruang dosen fisika MIPA Selatan UGM)

36. "Ketika masih kuliah, setiap mencatat materi kuliah dari dosen, saya selalu langsung terjemahkan kata-kata dosen itu dalam bahasa Inggris dan menuliskannya di catatan saya, meskipun tidak sepenuhnya benar tata bahasanya, dan alhamdulillah saya berhasil." (Pak Kamsul Abraha, 2004, kul. Fis. Das. II)

37. "Ilmu itu berasal dari Tuhan. Oleh karena itu, hendaknya kita berdoa sebelum dan sesudah kita belajar." (Bu Zahara Muslim, 2004, di Lab. Fis. Atom-Inti)

38. "Saudara jangan khawatir kalau tidak bisa hafalan, sebab fisika laser yang sebenarnya itu isinya rumus melulu." (Prof. Muslim, 2004, almarhum)

39. "Anda bertanya kepada saya cara mencari vektor medan magnet di seluruh ruangan akibat kawat berarus. Tapi, hukum Biot-Savart bentuk vektor saja Anda tidak tahu." (Pak Mirza, 2004, di ruang dosen prodi fisika, MIPA selatan UGM)

40. "Kalau Anda ingin mencoba apakah piringan yang berputar dengan kecepatan tinggi bisa mengawetkan makanan, ya dicoba saja." (Pak Mirza, 2004)

41. "Untuk menyelesaikan persamaan $x - \cos x = 0$ itu tidak perlu eksperimen pakai pegas. Cukup dengan metode numerik saja." (Pak Mirza, 2004)

42. "Setiap manusia itu mempunyai bakatnya sendiri-sendiri. Jadi, kalau kalian tidak bisa fisika, kalian tidak perlu berkecil hati. Bahkan di dalam fisika itu sendiri pun, masing-masing mahasiswa memiliki keahlian khusus sendiri-sendiri di beberapa cabang fisika." (Bu Zahara Muslim, 2004)

43. "You had mixed everything! Your report doesn't seem like a REPORT!! Do you think that you know enough about experiment? Which is your error estimation? Are you satisfied with your report? You had made the report by your way. Now, make the report by MY WAY!! ? Nilaimu masih saya tahan. Kumpulkan langsung pada saya secepatnya sebelum tanggal 24 Mei 2004." (Seorang Asisten Eksperimen Fisika Pendahuluan II, 2004)

44. "Ikut aturan itu artinya tertib. Ikut aja lah sesuai dengan format laporan yang berlaku." (Seorang Asisten Eksperimen Fisika Pendahuluan II, 2004)

45. "Hati-hati kalau memperdalam fisika. Nanti bisa terjerumus ke alam bawah sadarmu." (Seorang Asisten Eksperimen Fisika Pendahuluan II, 2004)

46. "Baru pertama kali metode perhitungan ralat dengan bilangan kompleks aku ketahui sejak aku dilahirkan." (Mas Lukman, Asisten E. Fisika Pend. II, 2004)

47. "Dari mana kamu dapatkan rumus itu?" (Tumpal Dumohar Sinaga, 2004)

48. "Bisakah kamu ngerjain soal pakai rumus itu?" (Yustinus Sinaga, 2004)

49. "Kowe ngopi buku meh nggô ngapa? Meh dikôleksi?" (Mas Martin, 2004)

50. "Lu gila, ya? Mana ada orang ngirim SMS beginian? Intinya apa coba? Aku disuruh ngerjain soal itu? Nggak tau orang lagi sibuk aja. Mikir pakai otak, jangan pakai dengkul." (Antok Gonzaga, Teknik Elektro UGM, 2004)

51. "Nek ana rumus salah kôk dikotaki, kuwi jenenge ngapusi." (Prof. Muslim, 2004, almarhum, saat kuliah Fisika Dasar II di fisika UGM)

52. "I really understand the theory. I just can't work the problem." (Roald K. Wangsness, Penulis Buku Electromagnetic Fields, JWS)

53. "Kuliah, sudah. Mencatat, sudah. Tapi kalau kalian sampai rumah langsung tidur, ya, kalian tidak akan berhasil dalam kuliah." (Pak Agung B. S. U. , 2004)

54. "Ha ha ... Anda terlalu mempermasalahkan notasi. Katanya cara yang Anda pakai bisa mengurangi penggunaan simbol? Lha ini malah banyak pakai simbol." (Pak Ikhsan Setiawan, 2004, saat kuliah Listrik Magnet A)

55. "Anda bertanya, 'Kurva tertutup dapat membungkus luasan. Luasan tertutup dapat membungkus volume. Lalu volume membungkus apa?'. — Volume membungkus ... helm!!" (Pak Ali Djoko, 2004, seusai kuliah Fisika Dasar II B)

56. "Fuzzy Statistics yang saya maksudkan di sini is not related with Fuzzy Logic." (Pak Mirza, 2004, di ruang sidang)

57. "Meskipun dosen lain pada presentasi pakai Power Point, saya hanya pakai transparansi. Yang penting isinya." (Pak Bambang Murdaka, 2004)

58. "Kalau kita terus-menerus berprinsip bahwa fisika hari ini adalah teknologi hari esok, maka hari ini kita mau makan apa?" (Pak Bambang Murdaka, 2004)

59. "Meskipun kalian sekarang masih mahasiswa, tetapi nanti kalau kalian menjadi peneliti sungguhan, dan kalian memanipulasi data hasil penelitian agar diperoleh data yang bagus, maka kalian berdosa, karena bagi seorang peneliti, data adalah uang. Oleh karena itu, kalian perlu mengikuti kuliah metode penelitian fisika ini untuk menghindari dosa tersebut." (Pak Sunarta, 2004)

60. "Menyederhanakan Masalah tanpa Kehilangan Kekhususannya" (Kompetensi Pendidikan Program Studi Sarjana Teknik Elektro UGM)

61. "Semakin cepat Anda membuat sebuah program, maka akan semakin lama Anda menyelesaikannya." (Dalil Murphy untuk Pemrograman Komputer)

62. "Program studi elektronika dan instrumentasi lahir untuk menjembatani dan merukunkan fisika murni dengan teknik elektro." (Niko, 2005, di Lab. ELINS)

63. "Di zaman modern ini, dunia semakin silau saja dengan semakin berkembangnya teknologi dan ilmu pengetahuan." (Budhe Pri, 2005, saat doa keluarga)

64. "Pada hakekatnya, ilmu pengetahuan itu menjauhkan kita dari Tuhan." (Pakdhe Pri, 2005, saat doa keluarga)

65. "Kalau di teknik mesin tempatku kuliah, semua tugas dari dosen harus diketik pakai mesin ketik, karena kalau ditulis tangan, mahasiswa bisa menyalin pekerjaan mahasiswa lain dengan mudah menjelang batas akhir pengumpulan tugas itu, sedangkan kalau pakai komputer, tugas itu bisa dengan mudah di-copy-paste disertai modifikasi agar tidak sama aslinya." (Mas Yoan, 2005)

66. "Di kuliah mekanika-kuantum-nya Pak Muslim itu, barang mudah dibuat susah. Padahal sebenarnya teori kuantum itu sederhana. Misalnya, kalau kita beru-saha berharap terus-menerus dalam hati untuk menggerakkan benda ringan, maka suatu ketika benda itu akan bergerak sedikit." (Mas Wisnu, 2005)

67. "Kita bisa membahas fisika gunung api dengan menggunakan mekanika kuantum, kalau kita mau, hanya saja rumit." (Bu Zahara Muslim, 2005)

68. "Bacalah buku apapun itu, tidak harus buku fisika." (Bu Zahara Muslim, 2005)

69. "Leo itu serius banget belajar fisika. Dari mukanya aja udah kelihatan banget." (Mbak Elida Lailiya Istiqomah, 2005, saat kuliah pagi, Listrik-Magnet B)

70. "Di zaman sekarang, ada banyak sekali orang yang menguasai teori relativitas umum. Saya juga menguasai teori relativitas umum. Tapi sampai sekarang saya tidak mendapat nobel." (Pak Rinto Anugroho, NQZ, 2005)

71. "Jika kalian mengerjakan soal ujian yang menghendaki jawaban umum, maka tawarlah soal itu menjadi kasus khusus sampai batas maksimal keumuman kasus yang bisa kalian kerjakan." (Pak Arief Hermanto, 2005)

72. "Ketika kuliah, saya pernah dimarahi Pak Muslim karena sering menawar soal yang menghendaki jawaban umum menjadi soal yang hanya menghendaki jawaban khusus, meskipun jawaban saya benar." (Pak Arief Hermanto, 2005)

73. "Teorema $1 + 1 = 2$ itu harus dibuktikan." (Pak Rosyid, 2005)

74. "Simbol matematika itu terserah." (Pak Rosyid, 2005)

75. "Tampaknya kita lebih enak kalau belajar dari yang umum dulu, kemudian yang khusus." (Pak Rosyid, 2005, saat kuliah Matematika Fisika Teori 1)

76. "Saya pernah dua kali dikecewakan oleh orang-orang matematika. Pertama kali, dalam suatu pertemuan ilmiah matematika, dibahas mengenai pemanfaatan matematika dalam fisika. Ternyata yang dibahas di sana hanyalah penerapan penyelesaian sistem persamaan linier yang muncul dalam hukum tegangan dan arus Kirchhoff yang hanya memakai aljabar linier biasa. Padahal pertemuan tersebut dihadiri oleh para pakar fisika dan matematika, seperti Pak Muslim dan Pak Mirza. Lalu setelah pertemuan itu, dalam suatu jamuan makan siang bersama orang-orang matematika, saya jelaskan bahwa formalisme matematika, seperti geometri diferensial, teori himpunan dan bilangan, dan sebagainya itu diterapkan juga dalam fisika." (Pak Rosyid, 2005)

77. "Tampaknya beliau ini sudah terbiasa dengan istilah matematika, karena katanya, dia bertanya untuk yang terakhir kali, tapi ternyata dia masih bertanya juga, sehingga bagi dia, maksimum itu tidak tunggal." (Pak Rosyid, 2005, di depan pintu Lab. Fisika Atom-Inti UGM)

78. "Sebuah tim sepak bola yang baik harus menempatkan pemain-pemain terbaik di setiap lini. Kuliah diskusi interaktif mekanika klasik ini tidak akan bisa berjalan lancar kalau kalian belum menguasainya." (Pak Rosyid, 2005)

79. "Pak Rosyid itu matematis sekali kalau ngajar. Bahkan lebih matematis daripada Pak Muslim sekalipun. Pak Supama aja mengakui itu." (Tumpal, 2005)

80. "Semakin kita merasa bahwa mekanika kuantum itu mudah, maka semakin tidak tahulah kita apa itu mekanika kuantum." (Mas Fachruddin, 2005)

81. "Pak Muslim pernah main catur, ngalahin 7 orang sekaligus." (Tumpal, 2005)

82. "Kuliah fisika inti Bu Zahara langsung dapet A kalau kita bisa jelasin kenapa di dalam inti atom itu tidak mungkin ada elektron. Dulu, pas ujian aku bisa jelasin itu, dan alhamdulillah aku dapet A." (Mas Joko Purwanto, 2005)

83. "Transformasi Lorentz untuk perpindahan dan kecepatan bisa saya turunkan selama kurang dari 10 menit. Kalau Anda mencoba memperumum transformasi Lorentz untuk diterapkan di kinematika relativitas umum, seharusnya nanti muncul presesi Thomas. Tapi di artikel yang Anda buat, saya

tidak melihat munculnya presesi Thomas. Coba baca skripsinya Mbak Fitri. Atau Anda bisa baca bukunya Pak Rinto tentang relativitas umum. Tapi Anda harus beli bukunya. Anda punya uang tidak?" (Prof. Muslim, 2005, almarhum)

84. "Pak Muslim sering melukis tokoh-tokoh fisika." (Bu Zahara, 2005)

85. "Karena tidak ada perbedaan signifikan antara Fisika Statistik dan Mekanika Statistik, maka boleh dianggap bahwa keduanya adalah sinonim." (Pak Arief Hermanto, 2005, di diktat kuliah Fisika Statistik)

86. "Sesungguhnya, fisika itu tidak membutuhkan matematika." (Pak Arief Hermanto, 2005, saat kuliah Fisika Statistik di MIPA Utara UGM)

87. "Sepanjang teorema matematika dan fisika itu pasti, maka teorema itu tidak terkait dengan kenyataan. Tetapi apabila teorema itu terkait dengan kenyataan, maka teorema tersebut tidak pasti." (Albert Einstein)

88. "Matematika adalah ilmu pengetahuan tentang ketakterhinggaan, yang tujuannya adalah memahami ketakterhinggaan itu secara simbolik dengan piranti manusiawi yang terhingga." (Hermann Weyl)

89. "Kalau Anda terus-menerus bertanya kepada saya, padahal saya sedang belajar untuk mempersiapkan kuliah mekanika statistik, saya jadi tidak bisa belajar, sehingga nanti saya mau mengajar apa?" (Pak Mirza, 2006)

90. "Begini, lho. Biar Anda tidak tersesat di kemudian hari, saya beri tahu. — Himpunan bilangan kompleks itu bukanlah gabungan antara himpunan bilangan riil dan himpunan bilangan imajiner, melainkan mirip dengan produk Cartesis himpunan riil dengan dirinya sendiri, yang padanya telah didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian yang bersifat tertutup. Sini saya gambarkan." (Pak Rosyid, 2006, seusai kuliah Fisika Kuantum B di MIPA Selatan UGM)

91. "Sudah saya katakan, saya mau jemput anak saya. Tapi Anda malah terus-menerus menanyai saya. Seharusnya tidak begini caranya Anda bertanya. Seharusnya Anda bertanya ketika kuliah tadi supaya mahasiswa lainnya juga bisa ikut mendengarkan. Saya bukannya marah. Saya rasa hal ini tidak memerlukan pemikiran rumit. Tanya saja sama teman-teman Anda, bagaimana cara bertanya pada dosen. Saya rasa mereka lebih tahu itu." (Pak Rosyid, 2006)

92. "Pak, saya mendapat murid les privat seorang anak perempuan. Tapi dia minta pada saya untuk mengajar di kamarnya. Bagaimana sebaiknya, Pak? Saya takut dosa, Pak." (Frenky Suseno Manik, 2006, saat kuliah Fisika Partikel)

93. "Seorang laki-laki dewasa boleh memberikan les privat kepada seorang anak perempuan, asalkan harus di ruang terbuka. Dulu saya juga pernah membimbing mahasiswi S3 saya di ruang terbuka." (Pak Mirza, 2006, saat kul. F. Par.)

94. "Hayo, tunjukkan ayatnya pada saya." (Pak Mirza, 2006, saat kul. Fis. Part.)

95. "Ketika kita menuliskan suatu ungkapan matematis yang memakai tanda kurung, maka kalau kita menuliskan tanda kurung buka, disusul bilangan-bilangan, tetapi lupa atau dengan sengaja tidak menuliskan tanda kurung tutup setelah bilangan-bilangan itu dituliskan, maka bagi saya itu tidak masalah, karena toh bilangan-bilangan itu tidak akan lari ke mana-mana." (Pak Mirza, 2006)

96. "Kalau mau buat kopi atau teh, silakan buat sendiri." (Pak Mirza, 2006, saat kuliah Fisika Partikel di ruang dosen MIPA Utara)

97. "Kalau kalian tidak bisa menjawab tebak-tebakan saya ini, maka kalian tidak akan bisa menguasai fisika partikel." (Pak Mirza, 2006, saat kuliah F. P.)

98. "Mana teorema Noether-nya? Kalau yang itu sudah ada di mekanika klasik." (Pak Mirza, 2006, saat kuliah Fisika Partikel di ruang dosen MIPA Utara)

99. "Kalau diagram Feynman tidak dipakai untuk menelaah hamburan, maka ketika kuliah fisika partikel, papan tulis kita tidak akan cukup untuk menuliskan prosedur mencari luas tampang lintang hamburan." (Pak Mirza, 2006)

100. "Setiap kali saya melihat kembali soft-copy buku saya, Mekanika Kuantum, itu, tangan saya selalu gatel untuk menambahkan beberapa hal di dalamnya, jadinya buku itu semakin lama semakin tebal, sehingga akhirnya soft-copy buku saya itu tidak pernah saya buka-buka lagi." (Pak Rosyid, 2006, saat kul. M. K. B)

101. "Kalau minum itu jangan nunggu sampai haus." (Yustinus Sinaga, 2006)

102. "Sewaktu kuliah, Pak Pekik juga aktif di KF Gama. Jadinya, akademik dapet, organisasi juga dapet, ya Pak?" (Arrajab Darsaputra, 2006, ketika seminar fisika di MIPA Selatan UGM)

103. "Lha piye meneh? Fisika kuwi penting, tapi organisasi ya penting, je." (Budi Suwondo, 2006, di depan pintu KF Gama UGM)

104. "Bertanya itu ada haditsnya." (Mas Joko Purnomo, 2006, saat KKN UGM)

105. "Kalo ngomongin agama itu nggak main-main, lho." (Mas Syamsul Rojab, 2006)

106. "Sak tenane kuwi Niel Amstrong durung pernah ning bulan. Sak tenane planet-planet kuwi ora ana. Amerika kuwi ngapusi." (Mas Joko Purnomo, 2006)

107. "Aku nduwe vidione, lho, nek Niel Amstrong kuwi sak tenane durung pernah ning bulan." (Mas Terry Castello, 2006, saat KKN UGM pasca gempa)

108. "Aku percaya wae nek Niel Amstrong wis tau ning bulan. — Jarene, Pak Arief ya ora percaya nek Niel Amstrong wis tau ning bulan." (Budi Suwondo, 2006)

109. "Limit kuwi ora guna ning teknik elektro." (Mas Muklis, 2007, di kostnya)

110. "Wis, kuwi ora usah dibahas ndhisik. Pak Rosyid wae wis tau ngomong, 'Belajar fisika dan matematika itu seperti menyapu lantai. Kalau kita belum mampu membersihkan lantai itu, maka tutuplah dulu kotoran itu dengan tikar. Begitu juga, kalau kita belum faham dari mana munculnya persamaan atau teorema ini, maka kita terima saja dulu untuk sementara. Sebab kalau tidak, kalian akan kehabisan banyak waktu, karena terus-menerus hanya berkutat di persamaan / teorema itu saja.'." (Muhammad Adhib Ulil Absor, 2006)

111. "Ada mahasiswa yang kuliah mekanika-kuantumnya tidak lulus-lulus. Ternyata kalkulus diferensial saja dia tidak faham." (Prof. Muslim, 2007, almarhum)

112. "Einstein itu sombong. Beliau tidak mau diganggu ketika sedang berpikir keras sekalipun oleh isterinya saat mengantarkan makanan kepadanya. Katanya, kalau diganggu, konsentrasinya buyar." (Prof. Muslim, 2007, almarhum)

113. "Untuk bilangan imajiner, ada transformasi antara i yang dipakai di fisika dan j yang dipakai di teknik elektro, yaitu $j = -i$." (Prof. Muslim, 2007, almarhum)

114. "Mekanika kuantum itu tidak membutuhkan ruang Hilbert." (Prof. Muslim, 2007, almarhum, di Laboratorium Fisika Atom dan Inti UGM)

115. "Banyak di antara kalian yang menjawab soal-soal ujian mekanika kuantum dari saya dengan jawaban yang panjang lebar. Padahal jawaban-jawaban itu isinya sampah semua." (Prof. Muslim, 2007, almarhum, saat kul. M. Kuant.)

116. "Ketika masih kuliah, Pak Muslim selalu belajar dulu sebelum kuliah, sehingga ketika mengikuti kuliah, dia tidak mencatat lagi." (Bu Zahara Muslim, 2007)

117. "Gue disuruh ngerjain soal ini? Sekarang gue lagi pindahan kost. — Ya, udah, sesuka jigông lu aja." (Lutfiah Munawaroh, 2007, via SMS)

118. "Anda menghabiskan waktu saya. Sebentar lagi saya ada kuliah. Anda sudah mengganggu saya." (Prof. Muslim, 2007, almarhum, di lab atom-inti UGM)

119. "Saya malu punya mahasiswa seperti Anda yang berpendapat bahwa banyaknya besaran pokok fisika itu cuma ada dua, yaitu panjang dan cacah. Anak SMP saja tahu kalau ada tujuh besaran pokok fisika." (Pak Gede Bayu, 2007)

120. "Kalau kamu mendapatkan inspirasi masalah fisika yang membutuhkan pemikiran ekstra untuk menyelesaikannya, kamu harus kejar terus itu sampai mendapatkan penyelesaiannya." (Mas Timothy, 2007, di ruang WGMPCDG)

121. "Kita ini orang matematik, sehingga kita harus berangkat dari aksioma-aksioma dalam menyelesaikan permasalahan fisika." (Mas Timothy, 2007)

122. "MS DOS kuwi mbayar, ora gratis." (Mas Teguh, Teknik Elektro UGM, 2007)

123. "Baca buku fisika itu yang penting bisa ngerjain soal." (Leo Habib, 2007)

124. "Tidak mesti begitu. Bahkan kita bisa membahas fisika tanpa memakai aljabar dan kalkulus vektor." (Leo Habib, 2007)

125. "Saat peringatan 100 tahun teori relativitas khusus, saya melihat bahwa sebagian besar pemakalah-pemakalah yang ikut acara itu atheis-atheis semua, karena sama sekali tidak berbicara tentang Tuhan dalam telaahnya. Hanya Pak Muslim yang masih mengkaitkan telaahnya dengan Tuhan." (Imel, 2007)

126. "Pak Muslim marah ketika saya menyebut operator diferensial parsial dengan sebutan 'dô', sebab sebutan itu tidak sah. Tetapi Pak Muslim sama sekali tidak pernah membentak orang." (Pak Rosyid, 2007)

127. "Katanya tadi Anda ingin skripsi dengan saya tentang mekanika kuantum? Mengapa tiba-tiba sekarang Anda ingin skripsi tentang robotika dengan saya? Saya jadi bingung. Lebih baik Anda skripsi sama Pak Rosyid saja, sebab di robotika itu banyak matematikanya." (Pak Muslim, 2007)

128. "Saya sarankan Anda skripsi sama Pak Arief daripada sama saya. Pak Arief suka sekali dengan formalisme integral dan fungsi eliptik." (Pak Rosyid, 2007)

129. "Ada cukup banyak versi transformasi Lorentz kinematis." (Pak Arief, 2007)

130. "Sebenarnya, $\partial^2 f/\partial y \partial x$ tidak sama dengan $\partial^2 f/\partial x \partial y$. Kalau Anda tidak percaya, tanya saja sama Pak Rosyid." (Pak Arief, 2007)

131. "Mengapa Anda yakin dan berani berpendapat bahwa bumi kita itu datar, dengan menganggap bahwa kutub selatan itu tidak ada? Padahal orang sudah melakukan penerbangan dari kutub utara melewati kutub selatan hingga kembali ke kutub utara lagi, dan Amerika sering mengadakan penelitian di kutub selatan. Tapi Anda boleh-boleh saja berpendapat demikian, asalkan Anda bisa menjelaskannya di sidang nanti. Saya dukung." (Pak Arief Hermanto, 2007)

132. "Buku-buku fisika saya sudah saya jual, untuk membeli buku-buku agama." (Firdaus, 2007, di kamar kostnya, di Klebengan, dekat kamar kost Frenky)

133. "Pas aku ndudohke judul skripsiku karo Pak Muslim tentang fungsi gelombang elektomagnetik dalam kotak kubus yang berlubang, jarene Pak Muslim, 'Wah, iki angel tenan.'." (Mas Darman, 2007, di ruang baca Perpus. Pusat UGM)

134. "Gua harus mengaku kepada kalian semua bahwa gua itu Tuhan." (Mas Timothy, 2008, via Friendster, account Tuhan Yang Maha Esa, about me)

135. "Kepada siapa saja yang merusak koleksi buku-bukuku, maka jangan ada yang menghalangi saya untuk membunuhnya." (Mas Timothy, 2008, via Friendster, account Tuhan Yang Maha Esa, about me)

136. "Bahkan saya bisa dapatkan semua akar kompleks dari persamaan kubik. Penyelesaian itu sudah ditemukan orang sejak zaman dahulu. Penemunya

setau saya, Muhammad al-Khawarizmi, seorang ilmuwan pada masa kejayaan Islam." (Mas Timothy, 2008, via Friendster, ganti account : Timothy Siahaan)

137. "Di diploma teknik elektro UGM itu ceweknya sedikit banget." (Mas Ardhi, 2008)

138. "Saya lebih suka pakai LaTeX untuk membuat paper matematis daripada MS Word karena fitur-fitur yang dipakai di LaTeX gratis semua." (Mas Ardhi, 2008)

139. "Definisi itu boleh dari mana-mana." (Mas Ardhi, 2008)

140. "Teman-teman, mari sejenak kita hentikan kuliah presentasi ini untuk beribadah. Kuliah itu penting. Tapi ibadah lebih penting." (Arief Muliawan, 2008)

141. "Ilmu fisika yang berkembang saat ini sama sekali tidak melibatkan peran Allah di dalamnya. Bagaimana kalau kita bersama membentuk sains yang melibatkan peran Allah?" (Pak Ali Djoko, 2008, saat kuliah Mekanika Statistik)

142. "Jangan tanya saya terus. Baca sendiri, dong." (Mas Ardhi, 2008)

143. "Tinggal ikuti aja semuanya seperti di Nakahara." (Mas Ardhi, 2008)

144. "Gula itu membantu kita berpikir dalam belajar." (Sr. Marceline, OSF, 2008)

145. "Bagi yang belum mengenal LaTeX segeralah belajar LaTeX agar bisa menulis karya ilmiah yang sarat matematik dengan lancar." (Pak Mirza, 2009)

146. "Pak Baiquni sendiri telah berhasil membuat grup SU(6)." (Mas Ardhi, 2009)

147. "Namanya Pak Baiquni disebutkan di bukunya Barut." (Pak Rosyid, 2009)

148. "Saya tidak pernah pakai Windows. Saya selalu pakai Linux." (Pak Pekik Nurwantoro, 2009, saat kuliah pagi, Mekanika Klasik)

149. "Tidak semua orang boleh mengutak-atik template CLS LaTeX untuk skripsi dan thesis. Itu hanya boleh dilakukan oleh orang-orang yang berwenang dan sudah mendapatkan izin saja." (Pak Pekik Nurwantoro, 2009, saat kuliah Mek. Klas.)

150. "Masak asas larangan Pauli saja Anda tidak tahu? Padahal itu sudah diajarkan di SMA." (Pak Mirza, 2009, saat kuliah pagi, Statistika Kuantum)

151. "Silakan maju ke depan untuk mencari eigen-value dan eigen-vector dari matriks 4×4 ini. Tapi harus cepat. Seperti Mas Fajar itu, lho." (Pak Mirza, 2009)

152. "Saya tidak selalu pakai LaTeX untuk menulis dokumen. Tergantung dokumen itu banyak rumusnya atau tidak." (Mas Ardhi, 2009)

153. "Ketika saya mengambil doktor di luar negeri, saya akhirnya menyelesaikan disertasi saya. Tetapi supervisor saya malah bilang, 'Lupakan pekerjaanmu. Mari kita bersantai sambil ber-barbeque bersama.'." (Pak Kamsul, 2009)

154. "Untuk buktikan persamaan ini, kamu nggak boleh langsung main tembak saja." (Mas Jaka Fajar Fatriansyah, 2009)

155. "Bukannya mencari luas segitiga di permukaan bola itu sudah diajarkan di Fismat IB ? Kalau nggak salah, dosennya Pak Bambang." (Mas Timothy, 2009)

156. "Kalau komputermu rusak dan nggak bisa nyusun thesis, nggak usah susah. Dulu aja pas aku skripsi, pas skripsiku sudah selesai, komputerku kena virus, dan file-nya ilang semua. Jadinya aku tulis ulang." (Mas Timothy, 2009)

157. "Mas Timmy, renang, yuk!" (Muhammad Adhib Ulil Absor, 2009)

158. "Nakahara itu terlalu mudah." (Pak Rosyid, 2009)

159. "Ilmu itu untuk apa? Yang lebih penting 'kan kita melatih pendengaran dan perasaan kita agar peka pada keadaan di sekitar kita." (Anita Tasya, 2009)

160. "Isane mung ndonga terus. Kita hidup itu untuk tolong-menolong." (Evi, 2009)

161. "Seorang fisikawan adalah seorang oportunis." (Pak Rosyid, 2010)

162. "Mengapa beliau tidak mau ikut membagikan ilmunya di presentasi KAM tanpa dibayar? Padahal saya sendiri saja juga tidak dibayar." (Pak Rosyid, 2010)

163. "Anda harus banyak bergaul." (Pak Rosyid, 2010, di Lab. Fisika Atom & Inti)

164. "Kelompok fisika teori kita ini terancam akan digusur." (Pak Rosyid, 2010)

165. "Kalau kamu mendapatkan masalah, tuangkan saja di blog, agar tidak membebani pikiranmu." (Mas Ardhi, 2010, di depan Lab. Foto Akustik MIPA UGM)

166. "Seharusnya Anda browsing dulu di Google untuk mengetahui apakah penelitian Anda sudah dikerjakan orang atau belum." (Pak Mirza, 2010)

167. "Janganlah tergoda untuk mencari penyelesaian yang paling umum dari suatu persamaan matematika dan fisika. Cukuplah kita mencari penyelesaian khususnya saja. Sebab, dari penyelesaian khusus itulah, kita bisa mendapatkan penyelesaian umum." (Pak Rosyid, 2010)

168. "Carilah, maka kamu akan mendapat." (Matius 7:7b)

169. "GRAVITY IS NOT A FORCE." (Tulisan di Kaos KAM, 2010)

170. "Kalau seorang mahasiswa telah lulus kuliah, maka keterikatan akademis antara dia dan dosen-dosennya jangan sampai terputus." (Pak Rosyid, 2010)

171. "Meskipun sudah lulus kuliah, sebaiknya Anda tetap harus ke kampus, agar Anda tidak terasing dari dunia akademis." (Pak Arief Hermanto, 2010)

172. "Kalau Anda nanti jadi ke UNILA, bentuklah komunitas fisika matematik di sana. Kalau tidak punya dana, ya harus cari, misalnya dengan berdagang. Juallah barang yang di Jogja lebih murah daripada di sana." (Pak Rosyid, 2010)

173. "Sekali-kali kita perlu melakukan rancang bangun alat dengan prinsip fisika, agar kita tidak selalu diperbudak oleh cara pemakaian alat." (Pak Rosyid, 2010)

174. "Waktu SMA dan kuliah dulu, saya juga sering nyolder-nyolder rangkaian-rangkaian elektronik." (Bu Dwi Satya Palupi, 2010)

175. "Sayangnya, para lulusan fisika tidak ada yang berminat untuk menjadi petani yang memakai prinsip fisika dalam bekerja." (Bu Dwi Satya Palupi, 2010)

176. "Hingga kini, kita belum bisa melihat elektron, tidak seperti atom, sehingga kita membutuhkan matematika untuk membahasnya." (Mas Timothy, 2010)

177. "Kowe pingin melu kuliahe Pak Muslim meneh? Kono, kuliah wae ning kuburan Sawit Sari." (Seorang Admin Pasca-Sarjana Fisika, lupa namanya, 2010)

178. "Buku-bukumu kuwi meh dinggô apa? Wis dikilôkke kabeh wae." (Evi, 2009)

179. "Penulis ingin menunjukkan kepada pembaca bahwa kebencian penulis kepada kedua topik itu tidak menghalangi penulis dalam menyelesaikan tesis ini, karena bagi penulis hal itu hanyalah kebencian dalam hal pemikiran dan prinsip. Kebencian itu tidak menghalangi penulis untuk tetap berlogika secara benar." (Cuplikan Prakata dalam Thesis Mas Ardhi, 2010)

180. "Kepada buah hati kami, Khadijah Dzakira Aftani, yang telah menghiasi perjalanan studi hingga selesainya tesis ini, penulis berpesan, ’Teruslah belajar, Sayang.’." (Cuplikan Prakata dalam Thesis Mas Ardhi, 2010)

181. "Kuliah di luar negeri ’kan nggak gampang." (Mbak Anis Nila Kusuma, 2011)

182. "Aku tidak butuh pujianmu. Aku hanya butuh ketulusan hatimu." (Mbak Anis Nila Kusuma, 2011, her status on Facebook)

183. "Ketika melakukan eksperimen, kalian harus tahu cara kerja alat dan untuk apa kalian melakukan itu. Mbok jamu gendong saja tahu untuk apa dia melakukan pekerjaannya. Harusnya kalian juga tahu." (Bu Eko Sulistyowati, 2011)

184. "Ngapain dan ke mana saja Anda selama ini? Kuliah matematika kita sudah sampai sejauh ini, lho." (Pak Rosyid, 2012, saat mengajar kuliah S3 Fisika)

185. "Kita harus berjihad. Jihad itu tidak harus berupa jihad fii sabilillah, tapi juga bisa dengan cara belajar mati-matian. Selain itu, ada banyak sekali medan jihad yang telah tersedia bagi kita." (Pak Rosyid, 2012, di Lab. Fis. Atom-Inti)

186. "Janganlah pernah ragu-ragu untuk segera memulai melakukan apa yang ingin Anda kerjakan, apapun itu." (Pak Rosyid, 2012, di Lab. Fisika Atom-Inti UGM)

187. "Aku arep cerita radha serem iki. Aku mau mbengi weruh kewan kok isa ngomong. Aku dadi mrinding sak kemenge. Kowe pingin ngerti kewane ngomong apa? Kewane pas tak delok ana telu, menek uwit, karo ngomong ... 'Pucuk .... Pucuk .... Pucuk ....'. Pokok'e medeni banget." (Taufik Estu Budi, 6 Juni 2013)

188. "Mangan karo sepiring kubis diwenehi bakmi sithik, padahal pesene bakmi Jawa. Hessjiaannn ...." (Taufik Estu Budi, 30 Oktober 2013, via SMS)

189. "Kalau cuma memperhatikan aspek kardinalitas saja dalam mempelajari objek-objek geometris berupa himpunan, maka itu terlalu sederhana." (Dito, 2014)

190. "Sebaiknya Anda tinggalkan ilmu dan komunitas Anda." (Joseph Ilmoe, 2014)

191. "No Windows in my house." (Linux Tarbiyah, 2014, on Facebook)

192. "$\LaTeX$ bukan hanya untuk dipelajari, tapi juga untuk digunakan." (Linux Tarbiyah, 2014, on Facebook)

193. "Kuliah sangat menghambat mahasiswa yang benar-benar ingin belajar." (Jorg Rachidie, 2014, on Facebook)

194. "Di antara beberapa hal yang saya benci adalah rokok, asap rokok, musik." (Abu Khadijah, on Wordpress)

195. "Kepepet atau tidak, jauh atau dekat, santai atau kesusu, gondes atau bukan, sak atos-atose ndas, tetep ra bakalan menang lawan aspal. — Bar weruh ndas tanpa helm dleweran getih." (Taufik Estu Budi, 18 Oktober 2015, via SMS)

196. "Alah, Linux kuwi padha wae karo Windows. Nganggo Windows bajakan wae ora masalah. Lha wong Bill Gates wae wis sugih banget kok." (Adi, 2015)

197. "Meja, kursi, dan alat-alat di lab ini mbuat sendiri semua." (Pak Surya, 2015)

198. "Alat-alat di lab ini sering sekali dicuri orang." (Pak Surya, 2015)

199. "Matematika itu mudah. Barangsiapa yang merasa bahwa matematika itu sulit, maka mungkin ia tidak mengetahui bahwa hidup ini sangat sulit." (Jorg Rachidie, 2015, on Facebook)

200. "Mengajar itu adalah pekerjaan remeh bagi suatu institusi. Mari kita bersama-sama meremehkan pekerjaan itu." (Jorg Rachidie, 2015, on Facebook)

201. "Setiap hari saya bekerja 24 jam." (Pak Surya, 2015, saat kul. Runtun Waktu)

202. "Saya bangga bekerja sebagai pegawai kerajaan Tuhan." (Pak Surya, 2015)

203. "Pak Muslim pernah mencoba memasukkan transformasi Wavelet ke dalam mekanika kuantum di buku beliau." (Pak Surya, 2015, di ruang dosen UKRIM)

204. "Belajar menghitung konvolusi dari dua buah fungsi kompleks itu seperti berlatih memainkan alat musik. Gagal, coba terus sampai bisa." (Pak Surya, 2015)

205. "Seharusnya anak-anak ilmu komputer itu bisa menguasai mekanika kuantum, karena persamaan Schrödinger itu bisa diperoleh dari pengoperasian konvolusi secara berulang-ulang terhadap fungsi-fungsi gelombang." (Pak Surya, 2015)

206. "Di zaman dulu, fisika dan matematika itu hanya dipelajari oleh para raja dan bangsawan, karena semua kebutuhan sudah tersedia, sehingga mereka tidak perlu lagi memikirkan makanan dan pakaiannya." (Pak Asan Damanik, 2015)

207. "Meskipun seseorang berhasil membuat rumus-rumus / teorema-teorema mate-matika sebanyak-banyaknya, dia tidak akan mendapatkan nobel. Hadiah nobel akan diperolehnya jika ia mampu berjasa bagi dunia." (Pak Surya, 2015)

208. "Bagaimanapun juga, transformasi Lorentz yang telah Anda peroleh itu tidak bisa dipakai di kinematika relativitas umum dengan cara melegalkan bahwa vektor kecepatan kerangka O’ menurut kerangka O berubah terhadap waktu. Teori relativitas umum tetap harus memakai geometri diferensial." (Pak Surya, 2015)

209. "Tidak setiap rumus fisika itu sederhana. Kerumitan rumus itu tergantung dari kerumitan sistem fisisnya." (Pak Surya, 2015, seusai kul. An. Runtun Waktu)

210. "Di zaman sebelum Newton menemukan kalkulus saja, orang sudah bisa mendapatkan rumus analitik untuk mencari luas lingkaran." (Pak Surya, 2015)

211. "Pak Arief sekarang sudah meninggalkan matematika yang rumit-rumit. Padahal dulu beliau sangat suka." (Pak Surya, 2015, di ruang dosen fisika UKRIM)

212. "Saya kalau mbuat kopi nggak pernah pakai gula." (Pak Surya, 2015)

213. "Suara rakyat adalah suara Tuhan." (Nando Andri, on Facebook)

214. "Playing music is for playing and fun, not for being famous." (Nando Andri, on Youtube)

215. "Jangan terlalu serius untuk dapat meraih kehidupan di dunia ini." (Fathurrohman, 2015, on Facebook)

216. "Dia mengatur urusan dari langit ke bumi, kemudian (urusan) itu naik kepada-Nya dalam satu hari yang kadarnya adalah seribu tahun menurut perhitunganmu." [Dari sini, diperoleh .] (As Sajdah 32:5)

217. "Maka apabila kamu telah selesai (dari sesuatu urusan), kerjakanlah dengan sungguh-sungguh (urusan) yang lain." (Alam Nasyrah 94:7)

218. "Berbahagialah orang yang miskin di hadapan Allah, karena merekalah yang empunya Kerajaan Sorga. — Berbahagialah orang yang berdukacita, karena mereka akan dihibur." (Matius 5:3-4)

219. "Berbahagialah orang yang lapar dan haus akan kebenaran, karena mereka akan dipuaskan." (Matius 5:6)

220. "Sebab itu janganlah kamu kuatir akan hari besok, karena hari besok mempunyai kesusahannya sendiri. Kesusahan sehari cukuplah untuk sehari." (Matius 6:34)

221. "Bagi manusia hal ini tidak mungkin, tetapi bagi Allah segala sesuatu mungkin." (Matius 19:26)

222. "Tetapi banyak orang yang terdahulu akan menjadi yang terakhir, dan yang terakhir akan menjadi yang terdahulu." (Matius 19:30)

223. "Dan apa saja yang kamu minta dalam doa dengan penuh kepercayaan, kamu akan menerimanya." (Matius 21:22)

224. "Sebab banyak yang dipanggil, tetapi sedikit yang dipilih." (Matius 21:22)

225. "Dan barangsiapa meninggikan diri, ia akan direndahkan dan barangsiapa merendahkan diri, ia akan ditinggikan." (Matius 23:12)

226. "Segera sesudah siksaan pada masa itu, matahari akan menjadi gelap dan bulan tidak bercahaya dan bintang-bintang akan berjatuhan dari langit dan kuasa-kuasa langit akan goncang." (Matius 24:29)

227. "Berjaga-jagalah dan berdoalah, supaya kamu jangan jatuh ke dalam pencobaan. — Roh memang penurut, tetapi daging lemah." (Matius 26:41)

228. "Sebab bagi Allah tidak ada yang mustahil." (Lukas 1:37)

229. "Sesungguhnya aku ini adalah hamba Tuhan. Jadilah padaku menurut perkataanmu itu." (Lukas 1:38)

Daftar Pustaka

[1] Arfken & Weber , 2005 . *Mathematical Methods for Physicist* . New York : Elsevier Academic Press Publications.

[2] Boas, Mary L. , 1983 . *Mathematical Methods for The Physical Sciences* . New York : John Wiley & Sons.

[3] Goldstein, Herbert , 2005 . *Classical Mechanics* . Manila : Addision-Wesley Publishing Company.

[4] Muslim , 1997 . *Seri Fisika Dasar Bagian I : Mekanika* . Yogyakarta : Laboratorium Fisika Atom dan Inti Jurusan Fisika FMIPA UGM.

[5] Nakahara, Mikio , 1997 . *Geometry, Topology, and Physics* . London : Institute of Physics Publishing.

[6] Rosyid, M.F. , 2005 . *Mekanika Kuantum* . Yogyakarta : I-Es-Ye dan WGMPCDG Jurusan Fisika FMIPA UGM.

[7] Rosyid, M.F. , 2005 . *Aljabar Abstrak dalam Fisika* . Yogyakarta : I-Es-Ye dan WGMPCDG Jurusan Fisika FMIPA UGM.

[8] Tao, R. R. H. , 2016 . *Formulasi Matematika dan Fisika* . Yogyakarta : Graha Ilmu.

[9] Wangsness, Roald , 1997 . *Electromagnetics Fields* . New York : John Wiley & Sons.